ISSN: 2281-1346

Department of Economics & Management

UNIVERSITÀ DI PAVIA

DEM Working Paper Series

Forma Canonica di Jordan e Sistemi di Equazioni Differenziali: Note Didattiche

Giorgio Giorgi
(Università di Pavia)

Cesare Zuccotti
(Università di Pavia)

 # 167 (11-18)

Via San Felice, 5
I-27100 Pavia

economiaweb.unipv.it

November 2018

Forma Canonica di Jordan e Sistemi di Equazioni Differenziali: Note Didattiche

Giorgio Giorgi (*) and Cesare Zuccotti (**)

1. Introduzione

Questo lavoro è in un certo senso la prosecuzione delle precedenti note didattiche degli autori (Giorgi e Zuccotti (2014)) sulla determinazione della soluzione generale di un sistema omogeneo di equazioni differenziali lineari del tipo

$$x'(t) = Ax(t) \tag{1}$$

con $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, ..., n$, matrice a elementi reali e costanti, $x'(t), x(t) \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Premettiamo subito che ci si può sempre ricondurre - come dovrebbe essere noto - al caso di $x'(t), x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Con riferimento alla determinazione della soluzione generale di (1), nelle precedenti note si era lasciato in superficie l'utilizzo della *forma canonica di Jordan,* strumento fondamentale (anche se niente affatto banale) dell'Algebra Lineare, utile non solo nello studio del sistema (1), ma anche in altre questioni (ad esempio nella dimostrazione del *Teorema di Cayley-Hamilton,* nello studio delle *matrici stabili,* ecc.). Vogliamo ora, senza pretesa di essere completi su un argomento piuttosto complesso, fornire qualche informazione supplementare sulla forma canonica di Jordan e sul suo utilizzo nella determinazione dell'integrale generale del sistema (1).

(*) Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali, Via S. Felice, 5 - 27100 Pavia, (Italy). E-mail: giorgio.giorgi@unipv.it
(**) Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali, Via S. Felice, 5 - 27100 Pavia, (Italy). E-mail: cesare.zuccotti@unipv.it

Quando la *dimensione* n del sistema (1) è uguale a 1, ossia la (1) si riduce ad un'equazione lineare del tipo

$$x'(t) = ax(t), \quad a \in \mathbb{R},$$

sappiamo che il suo integrale generale è

$$x(t) = e^{at}c, \quad c \in \mathbb{R},$$

con c costante arbitraria. La soluzione che soddisfa la *condizione iniziale* $x(t_0) = x_0$ è invece data da

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0.$$

In particolare, se $t_0 = 0$, abbiamo

$$x(t) = e^{at}x_0.$$

Occupiamoci ora della soluzione generale del sistema (1), con $n > 1$. Alla base di tutti i risultati che andiamo a presentare sta la seguente fondamentale proprietà.

- Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di A e se $v \in \mathbb{C}^n$ è un corrispondente autovettore, allora la funzione

$$x(t) = e^{\lambda t}v$$

è soluzione del sistema (1).

Infatti si ha

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}v\right) = \frac{de^{\lambda t}}{dt}v = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av \text{ (è } Av = \lambda v \text{ per ipotesi)} =$$

$$= A(e^{\lambda t}v) = Ax(t). \qquad \square$$

Ricordiamo che due matrici quadrate, dello stesso ordine, A e B, si dicono *simili* se esiste una matrice non singolare S, dello stesso ordine, detta *matrice di passaggio o matrice di transizione,* tale che

$$B = S^{-1}AS.$$

Dato un sistema del tipo (1), posto $x = Sy$, si ha

$$y'(t) = S^{-1}x'(t) = S^{-1}Ax(t) = S^{-1}ASy(t).$$

Queste considerazioni motivano la seguente definizione.

Definizione 1. Siano dati due sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti del tipo

$$x'(t) = Ax(t); \quad y'(t) = By(t).$$

I due sistemi si dicono *linearmente equivalenti* se le matrici A e B sono simili.

L'utilità della precedente definizione è dovuta al seguente risultato.

• Siano dati due sistemi $x'(t) = Ax(t)$ e $y'(t) = By(t)$, ove $B = S^{-1}AS$. Se $x(t)$ è una soluzione del primo sistema, allora $y(t) = S^{-1}x(t)$ è soluzione del secondo. Viceversa, se $y(t)$ è soluzione del secondo sistema, allora $x(t) = Sy(t)$ è soluzione del primo.

Dim. Sia $x(t)$ soluzione del sistema $x'(t) = Ax(t)$. Allora

$$y'(t) = S^{-1}x'(t) = S^{-1}Ax(t) = (S^{-1}AS)S^{-1}x(t) = BS^{-1}x(t) = By(t).$$

Analogamente per il viceversa. □

• Ricordiamo infine che l'insieme delle soluzioni del sistema (1) costituisce uno *spazio lineare a n dimensioni.* Da questa proprietà discende una conseguenza importantissima: se conosciamo n soluzioni $x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t)$, *linearmente indipendenti* del sistema (1), ossia conosciamo un *sistema fondamentale di soluzioni* di (1), la soluzione (o integrale) *generale* di (1) è data da

$$x(t) = c_1x^1(t) + c_2x^2(t) + ... + c_nx^n(t),$$

con $c_1, c_2, ..., c_n$ costanti arbitrarie.

Cominciamo a considerare il caso di matrice A *diagonalizzabile,* con autovalori *reali* $\lambda_1, ..., \lambda_n$, anche non distinti. Condizioni sufficienti affinché A sia diagonalizzabile sono:
i) i suoi autovalori sono *distinti; ii)* A è *simmetrica; iii)* A è *normale,* ossia $A^\top A = AA^\top$. In particolare, se A è *ortogonale,* ossia $A^\top A = AA^\top = I$. Condizione *necessaria e sufficiente* affinché A sia diagonalizzabile è che A ammetta n autovettori *linearmente indipendenti,* il che equivale al fatto che ogni autovalore λ_i sia *regolare* (o *semisemplice*), ossia che la sua *molteplicità geometrica* m_i^G sia uguale alla sua *molteplicità algebrica* m_i^A. Si veda, ad es., Giorgi (2017).

Introduciamo ora la funzione

$$x^k(t) = e^{\lambda_k t}v^k$$

ove λ_k è autovalore (reale, per ipotesi) di A e v^k è autovettore corrispondente. Per quanto abbiamo precedentemente osservato, ognuna di tali funzioni è soluzione di (1). Sia

$$x^1(t) = e^{\lambda_1 t}v^1,\ x^2(t) = e^{\lambda_2 t}v^2, ..., x^n(t) = e^{\lambda_n t}v^n.$$

Il Wronskiano del sistema (1) (si veda Giorgi e Zuccotti (2014)) è allora dato da

$$\det\left[e^{\lambda_1 t}v^1; e^{\lambda_2 t}v^2; ...; e^{\lambda_n t}v^n\right].$$

Applicando una nota proprietà dei determinanti, si ha allora che tale determinante è dato da

$$e^{(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n)}\det\left[v^1; v^2; ...; v^n\right].$$

Esso è senz'altro non nullo, in quanto gli autovettori $v^1, v^2, ..., v^n$ sono linearmente indipendenti per ipotesi. Si è così trovato un *sistema fondamentale di soluzioni* del sistema (1). Pertanto, sotto l'ipotesi in esame, la soluzione generale del sistema (1) è data da

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} v^k, \tag{2}$$

con $c_1, c_2, ..., c_n$ costanti arbitrarie, reali, se vogliamo soluzioni reali, come premesso.

Alla (2) possiamo anche pervenire con il seguente ragionamento (si veda Giorgi (2017), Giorgi e Zuccotti (2014)). Sia $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la matrice diagonale avente gli autovalori di A sulla diagonale principale e sia $P = (v^1; v^2; ...; v^n)$ la matrice di passaggio (quadrata, di ordine n e non singolare) avente gli autovettori di A (linearmente indipendenti) come colonne, matrice che realizza la diagonalizzazione di A. Dunque

$$P^{-1}AP = D \tag{3}$$

ossia

$$A = PDP^{-1}.$$

Operiamo ora il seguente cambio di variabili:

$$y(t) = P^{-1}x(t) \tag{4}$$

da cui $x(t) = Py(t)$.

Differenziamo entrambi i membri della (4) rispetto a t :

$$y'(t) = P^{-1}x'(t) =$$

$$= P^{-1}Ax(t) \quad (\text{essendo } x'(t) = Ax(t))$$

$$= P^{-1}APy(t) \quad (\text{poichè } x(t) = Py(t))$$

$$= Dy(t) \quad (\text{per la } (3)).$$

Il sistema originale è stato quindi trasformato nelle n equazioni "disaccoppiate"

$$y_k'(t) = \lambda_k y_k(t), \quad k = 1, ..., n.$$

Tali equazioni ammettono, come ricordato all'inizio del presente paragrafo, le soluzioni

$$y_k(t) = c_k e^{\lambda_k t}, \quad k = 1, ..., n,$$

con c_k, $k = 1, ..., n$, costante arbitraria.

Usando la trasformazione inversa $x(t) = Py(t)$, risaliamo alla soluzione generale di (1):

$$\begin{aligned} x(t) &= Py(t) = \left[v^1, ..., v^n\right] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v^2 + ... + c_n e^{\lambda_n t} v^n. \end{aligned}$$

Più in generale, sempre *sotto l'ipotesi che A sia diagonalizzabile,* supponiamo che A ammetta ℓ autovalori reali $\lambda_1, ..., \lambda_\ell$, contati con la loro molteplicità, e $(n - \ell)$ autovalori complessi che, essendo A reale, appaiono in coppie di autovalori complessi coniugati $\lambda_{\ell+1}, \bar{\lambda}_{\ell+1}, ..., \lambda_{\ell+m}, \bar{\lambda}_{\ell+m}$. Supponiamo anche qui che gli autovalori siano ripetuti secondo la loro molteplicità algebrica e dunque si abbia $\ell + 2m = n$. Corrispondentemente, a ciascun autovalore reale λ_k, $1 \leqq k \leqq \ell$, si associa un autovettore reale v^k, mentre a ciascuna coppia $(\lambda_{\ell+k}, \bar{\lambda}_{\ell+k})$, $1 \leqq k \leqq m$, si associa una coppia di autovettori $(v^{\ell+k}, \bar{v}^{\ell+k})$ complessi coniugati. Essendo A diagonalizzabile per ipotesi, tutti tali autovettori - reali e complessi - saranno (in numero totale n) linearmente indipendenti.

- Per ogni autovalore reale λ_k, $1 \leqq k \leqq \ell$, introduciamo la funzione

$$x^k(t) = e^{\lambda_k t} v^k.$$

- Per ogni coppia $(\lambda_{\ell+k}, \bar{\lambda}_{\ell+k})$, $1 \leqq k \leqq m$, di autovalori complessi coniugati, decomponiamo autovalori e autovettori in parte reale e parte immaginaria, ponendo

$$\begin{aligned} \lambda_{\ell+k} &= \alpha_k + i\beta_k \\ v^{\ell+k} &= u^k + iw^k. \end{aligned}$$

Sfruttando le *formule di Eulero* (si veda Giorgi (2017) e Giorgi e Zuccotti (2014) per i dettagli ed i relativi passaggi), introduciamo la coppia di funzioni

$$y^k(t) = \mathrm{Re}(e^{\lambda_{\ell+k}} v^{\ell+k}) = e^{\alpha_k t}(u^k \cos\beta_k t - w^k \sin\beta_k t);$$

$$z^k(t) = \mathrm{Im}(e^{\lambda_{\ell+k}} v^{\ell+k}) = e^{\alpha_k t}(u^k \sin\beta_k t + w^k \cos\beta_k t),$$

ove $k = 1, ..., m$.

Con le notazioni sopra introdotte, l'insieme delle funzioni (reali!)

$$\left\{x^1(t), ..., x^\ell(t), y^1(t), z^1(t), ..., y^m(t), z^m(t)\right\}$$

costituisce un *sistema fondamentale* di soluzioni del sistema (1). Pertanto l'integrale generale di tale sistema si scrive nella forma

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\ell} c_k x^k(t) + \sum_{k=1}^{m} (a_k y^k(t) + b_k z^k(t)),$$

con $c_1, ..., c_\ell, a_1, b_1, ..., a_m, b_m \in \mathbb{R}$.

Osservazione 1. Ribadiamo il fatto che l'esistenza di autovalori multipli non impedisce a priori la possibilità di diagonalizzare la matrice A. La matrice A è infatti non diagonalizzabile se e solo se, in caso di λ_i radice multipla, succede che $m^G(\lambda_i) < m^A(\lambda_i)$, ossia che la matrice A sia *difettiva.* Se è però $m^G(\lambda_i) = m^A(\lambda_i)$, la diagonalizzazione è possibile anche se λ_i è radice multipla, e valgono perciò le espressioni precedentemente viste per l'integrale generale $x(t)$ del sistema (1).

Esempio 1. Determinare il valore del parametro reale α affinchè la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \alpha - 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

risulti diagonalizzabile.

Poichè A è una matrice triangolare, i suoi autovalori sono dati dagli elementi della diagonale principale: $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 2$ i tre autovalori sono distinti e quindi A è senz'altro diagonalizzabile.

Sia $\alpha = 1$. La matrice diventa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Quindi $m^A(1) = 2$. Il rango di $[A - I]$ è

$$r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Di conseguenza $n - r(A - \lambda I) = 3 - 1 = 2 = m^G(1) = m^A(1)$ e quindi l'autovalore $\lambda = 1$ è *regolare.* Con $\alpha = 1$ la matrice A è diagonalizzabile.

Sia $\alpha = 2$. La matrice diventa

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. L'autovalore λ_2 è regolare, in quanto semplice. Occupiamoci quindi di $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$ ($m^A(2) = 2$). Il rango di $[A - 2I]$ è

$$r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Di conseguenza $n - r(A - \lambda I) = 3 - 2 = 1 = m^G(2) < m^A(2)$. Per $\alpha = 2$ la matrice A *non* è diagonalizzabile.

In alcuni testi classici sulle equazioni differenziali o sull'Analisi Matematica o anche sulla Matematica Applicata all'Economia (si veda, ad esempio, Cecconi e Stampacchia (1983), Castagnoli e Peccati (1990), Fiorenza e Greco (1999), Sansone (1941)) si trovano le seguenti considerazioni attinenti il caso ove A ammetta autovalori non tutti distinti e in particolare che non sia diagonalizzabile. Viene dimostrato che in tale caso, detto λ_i un autovalore di A avente molteplicità algebrica m_i, ad esso è sempre possibile associare m_i integrali $x^1(t), ..., x^{m_i}(t)$ *linearmente indipendenti* e ciascuno di essi è del tipo

$$x^k(t) = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} p_{1k}(t) \\ p_{2k}(t) \\ \vdots \\ p_{nk}(t) \end{bmatrix}$$

con $p_{1k}(t)$, $p_{2k}(t), ..., p_{nk}(t)$ polinomi di grado non superiore a $m_i - 1$.

Detti allora $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ gli autovalori distinti di A e $m_1, m_2, ..., m_r$ le rispettive molteplicità algebriche, all'autovalore λ_1 si associano m_1 integrali linearmante indipendenti, del tipo sopra indicato, all'autovalore λ_2 se ne associano m_2 e così via. Complessivamente si determinano così $m_1 + m_2 + ... + m_r = n$ integrali del sistema che costituiscono un *sistema fondamentale.* Si conclude dunque che l'integrale generale del sistema è del tipo

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} Q_1(t) + e^{\lambda_2 t} Q_2(t) + ... + e^{\lambda_r t} Q_r(t),$$

ove $Q_k(t)$ è un vettore colonna, $1 \leqq k \leqq r$, dipendente da m_k costanti, le cui componenti sono polinomi di grado non superiore a $m_k - 1$.

Tale formulazione si trova anche nella letteratura economica. Ad esempio, Quirk e Ruppert (1965), con riferimento al sistema (1), scrivono che la soluzione generale è data da

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{s} Q_j(t) e^{\lambda_j t}, \quad i = 1, ..., n,$$

"where $s \leqq n$ is the number of distinct characteristic roots of A, $Q_j(t)$ is a polynomial in t of degree one less than the number of times the j-th root is repeated, and λ_j is the j-th characteristic root of A."

Tramite la forma canonica di Jordan è possibile precisare la natura e la struttura di tali polinomi. Occorre prima però introdurre un altro approccio alla determinazione dell'integrale generale del sistema (1).

Un altro approccio, molto fruttuoso, alla ricerca dell'espressione generale della soluzione del sistema (1), è quello che fa ricorso al concetto di *matrice esponenziale.* Tale approccio, nella sua formulazione generale, prescinde dal fatto che A sia o meno diagonalizzabile.

2. Matrice Esponenziale

Ricordiamo anzitutto che il *limite di una successione* di matrici quadrate, dello stesso ordine n,

$$B_{(1)}, B_{(2)}, B_{(3)}, ..., B_{(k)}, ...$$

di elementi, rispettivamente,

$$b_{ij}(1), b_{ij}(2), ..., b_{ij}(k), ...$$

è, se esiste, una matrice $B = [b_{ij}]$, di ordine n, per la quale risulta

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \{b_{ij}(k)\} = b_{ij}$$

per ogni coppia (i, j). In tale caso si scrive

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} B_{(k)} = B$$

o anche

$$\left\{B_{(k)}\right\} \longrightarrow B.$$

Il *limite di una serie* di matrici quadrate, dello stesso ordine,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} B_{(k)} = B_{(1)} + B_{(2)} + B_{(3)} + ... \tag{5}$$

se esiste, è dato dal limite, per $k \longrightarrow +\infty$, di una successione $\left\{S_{(k)}\right\}$ di *somme parziali*

$$S_{(k)} = B_{(1)} + B_{(2)} + ... + B_{(k)}.$$

Se $S_{(k)}$ converge a una matrice $S = [s_{ij}]$, cioè se $\left\{S_{(k)}\right\} \longrightarrow S$, allora diremo che la serie (5) *converge* a S e scriveremo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} B_{(k)} = S.$$

Ricordiamo infine che se z è variabile (scalare) reale o complessa, la funzione esponenziale e^z può essere definita come

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Quando z è reale, tale definizione può essere ottenuta come conseguenza dello sviluppo in serie di Mac Laurin della funzione esponenziale.

Per non appesantire troppo la notazione, nel presente lavoro si indicherà con A^k la *potenza k-esima* della matrice quadrata A (e *non la k-esima colonna di* A, come ad esempio in Giorgi (2017)). Siamo ora pronti a definire la *matrice esponenziale.*

Definizione 2. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Si dice *matrice esponenziale di* A e la si indica con e^A oppure con $\exp(A)$, la matrice data dalla serie

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + ... + \frac{1}{k!} A^k + ...$$

Si dimostra che tale serie è sempre convergente, qualunque sia la matrice quadrata A e che la precedente definizione è equivalente alla seguente:

$$e^A = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \left(I + \frac{1}{k} A \right)^k .$$

Per la dimostrazione della convergenza si può vedere, ad esempio, Baciotti e Ricci (1991).

Il calcolo degli elementi della matrice e^A non è in genere semplice, soprattutto se non si dispone di un computer con relativo programma matematico. Se A è *diagonalizzabile,* il calcolo di e^A è relativamente facile: se A è diagonalizzabile, esiste una matrice P invertibile tale che $A = PDP^{-1}$, ove D è matrice diagonale avente sulla diagonale principale gli autovalori di A. Risulta poi

$$A^k = (PDP^{-1})^k = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PDP^{-1})}_{k \text{ prodotti}} = \underbrace{PDD...DP^{-1}}_{k \text{ prodotti}} = PD^k P^{-1}.$$

Quindi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{PD^k P^{-1}}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1} =$$

$$= P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \right) P^{-1} =$$

$$= P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} \lambda_1^k/k! & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k/k! \end{bmatrix} \right) P^{-1} =$$

$$= P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1} = Pe^D P^{-1}.$$

Esempio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 5$ e i relativi autovettori sono

$$\begin{aligned} x^1 &= \begin{bmatrix} -k \\ k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k \neq 0; \\ x^2 &= \begin{bmatrix} h \\ 2h \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad h \neq 0. \end{aligned}$$

Scegliendo, per esempio, $k = 1$ e $h = 1$, si ottengono due autovettori (l. i.) che, accostati, formano la matrice

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

dotata di inversa

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Risulta quindi

$$\begin{aligned} e^A &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-1} + \frac{1}{3}e^5; & \frac{1}{3}e^5 - \frac{1}{3}e^{-1} \\ \frac{2}{3}e^5 - \frac{2}{3}e^{-1}; & \frac{1}{3}e^{-1} + \frac{2}{3}e^5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esempio 3. Consideriamo la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo la sua equazione caratteristica si trovano i due autovalori complessi coniugati

$$\lambda_1 = 2 - i\sqrt{5}; \quad \lambda_2 = 2 + i\sqrt{5}$$

a cui sono associati autovettori complessi coniugati. Per esempio la coppia

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1 + i\sqrt{5} \\ -3 \end{bmatrix}; \quad x^2 = \begin{bmatrix} 1 - i\sqrt{5} \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Risulta quindi

$$P = \begin{bmatrix} 1 + i\sqrt{5} & 1 - i\sqrt{5} \\ -3 & -3 \end{bmatrix}; \quad \det(P) = -6i\sqrt{5}.$$

Risulta poi (omettiamo i passaggi)

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-i}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{6} - \frac{i}{6\sqrt{5}} \\ \frac{i}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{6} - \frac{i}{6\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Infine otteniamo

$$e^A = \begin{bmatrix} 1+i\sqrt{5} & 1-i\sqrt{5} \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2-i\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & e^{2+i\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-i}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{6}-\frac{i}{6\sqrt{5}} \\ \frac{i}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{6}-\frac{i}{6\sqrt{5}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^2\cos\sqrt{5}-\frac{1}{5}\sqrt{5}e^2\sin\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5}e^2\sin\sqrt{5} \\ \frac{3}{5}\sqrt{5}e^2\sin\sqrt{5} & e^2\cos\sqrt{5}+\frac{1}{5}\sqrt{5}e^2\sin\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Come si evidenzia nell'ultimo passaggio, anche se gli autovalori (e quindi anche gli autovettori) sono ad elementi complessi coniugati, il risultato finale può essere espresso in termini reali.

Chiudiamo elencando alcune proprietà della matrice esponenziale. Si veda, ad esempio, Coddington e Carlson (1997).

- Se A è già in forma diagonale, ossia $A = D$, da quanto precede risulta

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Infatti:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} diag\left(\frac{\lambda_1^k}{k!}, \frac{\lambda_2^k}{k!}, ..., \frac{\lambda_n^k}{k!}\right) = diag\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda_n}\right),$$

per il solito sviluppo in serie di MacLaurin della funzione esponenziale $y = e^x$.

- In particolare per la matrice nulla $A = [0]$ si ha

$$e^{[0]} = diag(e^0, ..., e^0) = I.$$

- La matrice esponenziale non è mai singolare e risulta

$$\det(e^A) = e^{tr(A)}$$

ove $tr(A)$ è la *traccia della matrice* $A : tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

- L'inversa della matrice esponenziale è

$$\left[e^A\right]^{-1} = e^{-A}.$$

- Risulta

$$(e^A)^\top = e^{(A^\top)}.$$

- Risulta, con $s, t \in \mathbb{R}$ (o anche $s, t \in \mathbb{C}$):

$$e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}.$$

Da notare che ponendo $s = 1$ e $t = -1$, troviamo

$$e^{A}e^{-A} = e^{0A} = e^{[0]} = I,$$

il che ci conferma che l'inversa di e^{A} è proprio e^{-A}.

- Sia A quadrata e $t \in \mathbb{R}$ e sia $f(t) = e^{tA}$. Risulta

$$f'(t) = Ae^{tA}.$$

Dim. Si ha

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k t^{k-1} = A\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}t^{k-1} =$$

$$= A\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k t^k = Ae^{tA}. \qquad \square$$

- Se A e B (matrici quadrate dello stesso ordine n) commutano, ossia $AB = BA$, allora anche le loro matrici esponenziali commutano e vale la formula

$$e^{A}e^{B} = e^{B}e^{A} = e^{A+B}.$$

3. Soluzione del Sistema (1) tramite Matrice Esponenziale

Riprendiamo il sistema (1):

$$x'(t) = Ax(t),$$

con $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, ..., n$, matrice ad elementi reali e, senza ledere la generalità dell'analisi, mettiamoci nel caso che anche $x(t)$ e $x'(t)$ siano vettori reali. Quando $n = 1$ ci riconduciamo al caso scalare

$$x'(t) = ax(t), \quad a \in \mathbb{R},$$

il cui integrale generale è, come già visto,

$$x(t) = ce^{at}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Se poi consideriamo il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

abbiamo già visto che l'unica soluzione è data da

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Se è $t_0 = 0$, ovviamente risulta

$$x(t) = x_0 e^{at}.$$

Il seguente teorema mostra come le precedenti formule si generalizzino ai sistemi se si sostituisce lo scalare e^{ta} con la matrice esponenziale e^{tA}.

Teorema 1. Dato il sistema omogeneo

$$x'(t) = Ax(t),$$

risulta:

i) Le colonne della matrice e^{tA} formano un sistema fondamentale di soluzioni e l'integrale generale è dato dalla formula

$$x(t) = e^{tA}c, \tag{6}$$

ove c è un arbitrario vettore di $\mathbb{R}^n$.

ii) La soluzione che soddisfa il problema di Cauchy (o problema delle condizioni iniziali) $x(t_0) = x^0$ è

$$x(t, t_0, x^0) = e^{(t-t_0)A}x^0. \tag{7}$$

Dim.

i) Ricordiamo che $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$ e quindi, per ogni vettore $c \in \mathbb{R}^n$, $e^{tA}c$ è soluzione del sistema. In particolare, scegliendo $c = e^1, c = e^2, ..., c = e^n$, dove $e^1, ..., e^n$ sono i vettori fondamentali di $\mathbb{R}^n$, si deduce che ogni colonna della matrice e^{tA} è soluzione. Essendo poi $\det(e^{tA}) = e^{t(tr(A))} > 0$, le colonne di e^{tA} sono linearmente indipendenti.

ii) Ponendo nella (7) $t = t_0$, si ha

$$x(t_0, t_0, x^0) = e^{0A}x^0 = Ix^0 = x^0. \qquad \square$$

Ribadiamo che la (6) e la (7) costituiscono "formule generali", in quanto *non* abbiamo fatto alcuna esplicita ipotesi sulla diagonalizzabilità o meno della matrice A. Resta naturalmente il problema di calcolare esplicitamente e^{tA}, la qual cosa, come già sappiamo, non è in genere banale.

Se A è già in forma diagonale, non ci sono problemi di sorta. Vuol dire in sostanza che allora le equazioni del sistema sono *disaccoppiate,* ossia

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ x_2'(t) = \lambda_2 x_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = \lambda_n x_n(t). \end{cases}$$

Non c'è in questo caso nessuna difficoltà nel calcolo di e^{tD}. Sappiamo che è

$$e^{tD} = diag(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, ..., e^{\lambda_n t})$$

e quindi l'integrale generale avrà l'usuale forma

$$e^{tD} = c_1 e^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n e^n e^{\lambda_n t}$$

essendo i vettori e^j, $j = 1, ..., n$, gli autovettori corrispondenti di $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Sia ora A *diagonalizzabile* (ossia abbia n autovettori linearmente indipendenti, ossia abbia gli autovalori tutti *regolari*). Supponiamo, per semplicità, che la matrice A (ora non più diagonale) possegga n autovettori reali linearmente indipendenti $x^1, x^2, ..., x^n$, corripondenti rispettivamente agli autovalori reali (eventualmente non tutti distinti) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Allora A è diagonalizzabile. Ritroviamo, applicando la matrice esponenziale, l'integrale generale di (1), già descritto nel paragrafo 1.

Posto $S = [x^1; x^2; ...; x^n]$, si ha

$$S^{-1}AS = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = D$$

e di conseguenza

$$A = SDS^{-1},$$

da cui

$$A^k = SD^kS^{-1}.$$

Risulta allora

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} SD^kS^{-1} = S\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} D^k\right) S^{-1} = Se^{tD}S^{-1}.$$

Dalla (6), l'integrale generale è allora

$$x(t) = Se^{tD}S^{-1}c. \tag{8}$$

La (8) si può scrivere in forma più semplificata, notando che $S^{-1}c$ è un arbitario vettore di $\mathbb{R}^n$ (essendo c un arbitrario vettore di $\mathbb{R}^n$), che seguiteremo a chiamare c, e che

$$Se^{tD}S^{-1} = \left[x^1; x^2; ...; x^n\right] diag(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, ..., e^{\lambda_n t}) = \left[x^1 e^{\lambda_1 t}; x^2 e^{\lambda_2 t}; ..., x^n e^{\lambda_n t})\right].$$

L'integrale generale assume quindi la familiare forma seguente

$$x(t) = c_1 x^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 x^2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n x^n e^{\lambda_n t},$$

ove $c_1, c_2, ..., c_n$ sono costanti (reali) arbitrarie e dove $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sono gli autovalori (reali, per ipotesi) di A con associati autovettori (l. i.) $x^1, x^2, ..., x^n$. Pertanto si può evitare di calcolare S^{-1}.

Esempio 4. Sia dato il sistema

$$x'(t) = Ax(t),$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$. I corrispondenti autovettori sono

$$x^1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha \neq 0; \qquad x^2 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \beta \neq 0; \qquad x^3 = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \gamma \neq 0.$$

La soluzione generale è quindi

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Abbiamo visto (Esempio 3) come sia possibile, nel caso di autovalori (distinti) complessi coniugati ottenere un'espressione reale di e^A. Precisiamo un po' meglio il calcolo della soluzione reale

$$x(t) = e^{At}c$$

nel caso di autovalori regolari reali e complessi.

Sia A matrice (reale) quadrata di ordine n, diagonalizzabile, con autovalori sia reali che complessi. Siano $\lambda_1, , , ., \lambda_k$ autovalori reali e $\lambda_j = a_j + ib_j$, $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$, per $j = k+1, ..., k+m$ (con $k + 2m) = n$) coppie di autovalori complessi coniugati. Essendo gli autovalori regolari, si può trovare una base per $\mathbb{R}^n$ di vettori $u^1, ..., u^k, v^{k+1}, w^{k+1}, ..., v^{k+m}, w^{k+m}$, dove $u^1, ..., u^k$ sono autovettori reali associati a $\lambda_1, , , ., \lambda_k$ e $u^j = v^j + iw^j$, $\bar{u} = v^j - iw^j$ sono coppie di autovettori coniugati corrispondenti a λ_j, $\bar{\lambda}_j$, $j = k+1, ..., k+m$.

Anche in questo caso la matrice di passaggio S è invertibile perchè le sue colonne sono una base di $\mathbb{R}^n$ e quindi ha senso considerare la matrice $B = S^{-1}AS$ che però non è diagonale. Risulta

$$B = diag(\lambda_1, ..., \lambda_k, B_{k+1}, ..., B_{k+m})$$

dove

$$B_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}, \ j = k+1, ..., k+m.$$

Risulta

$$e^A = S diag\left(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_k}, C_{k+1}, ..., C_m\right) S^{-1}$$

dove

$$C_j = e^{a_j} \begin{pmatrix} \cos b_j & -\sin b_j \\ \sin b_j & \cos b_j \end{pmatrix}, \ j = k+1, ..., k+m,$$

e di conseguenza

$$e^{tA} = Sdiag\left[e^{\lambda_i t}, e^{a_j t}\begin{pmatrix} \cos b_j & -\sin b_j \\ \sin b_j & \cos b_j \end{pmatrix}\right]S^{-1}$$

$(i = 1, ..., k;\ j = k+1, ..., k+m)$.

Risulta poi che l'integrale generale è $x(t) = e^{tA}c$ e, come nel caso precedente, si può evitare il calcolo di S^{-1}.

Affrontiamo ora il caso di A *non diagonalizzabile.* Qui il calcolo di e^{tA} è meno banale e si dovrà fare riferimento alla cosiddetta *forma canonica di Jordan* della matrice A. Al di là delle implicazioni, sia analitiche che applicative della forma canonica di Jordan, va comunque detto che da un punto di vista strettamente "pratico e algoritmico" il caso di autovalori multipli non regolari costituisce una proprietà "non robusta" della matrice A, nel senso che è sempre possibile perturbare i coefficienti a_{ij} con perturbazioni "piccole a piacere", in modo da ottenere una matrice con autovalori *tutti distinti.* Tale risultato, dovuto a Bellman (1960), può essere precisato nel seguente modo.

Sia $\|A\|$ una qualsiasi *norma* della matrice quadrata A, di ordine n, ossia $\|A\|$ è un numero *reale* che soddisfa le seguenti relazioni:

(*i*) $\|A\| \geqq 0$, qualunque sia la matrice reale A di ordine n. Risulta $\|A\| = 0$ se e solo se $A = [0]$.

(*ii*) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(*iii*) $\|A + B\| \leqq \|A\| + \|B\|$ per ogni matrice A, B di ordine n.

(*iv*) $\|AB\| \leqq \|A\| \cdot \|B\|$ per ogni matrice A, B di ordine n ("disuguaglianza di Schwarz").

Esempi di norma di A sono:

a) $\max\limits_j \sum_i |a_{ij}|$,

b) $\max\limits_i \sum_j |a_{ij}|$,

c) $\left(\sum_i \sum_j (a_{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

d) $n \cdot \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$.

Ciò premesso, vale il seguente risultato.

Teorema 2 (R. Bellman). Data una matrice reale A di ordine n, è sempre possibile trovare una matrice reale B di ordine n e avente autovalori distinti, tale che

$$\|A - B\| \leqq \mu,$$

ove $\mu > 0$ può essere scelto arbitrariamente piccolo.

Prima di esporre le questioni principali relative alla cosiddetta *forma canonica di Jordan,* facciamo notare che vale il seguente principio generale. Se A è simile a B, ossia se $A = SBS^{-1}$, allora per ogni intero k si ha $A^k = SB^kS^{-1}$ e quindi

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{A^j t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{k} \frac{SB^jS^{-1}t^j}{j!} = S\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{B^j t^j}{j!}\right)S^{-1}$$

e passando al limite per $k \longrightarrow +\infty$,

$$e^{tA} = Se^{tB}S^{-1}.$$

Una "formula chiusa" per il calcolo della soluzione generale di $x'(t) = Ax(t)$, si trova utilizzando la similitudine di A con una particolare matrice "diagonale a blocchi", detta *forma canonica di Jordan.*

4. Forma Canonica di Jordan

E' noto (si veda, ad esempio, Bertocchi, Stefani e Zambruno (1992), Dedò e Varisco (1991), Giorgi (2017), Schlesinger (2011)) che ogni matrice quadrata può essere trasformata, con una trasformazione per similitudine, in una matrice triangolare, superiore o inferiore (*Teorema di Schur*). L'importanza di questo fatto risulta evidente, quando si pensi che, per la loro particolare forma, le matrici triangolari si "manovrano" più facilmente che quelle non triangolari e quindi è spesso vantaggioso dimostrare su di esse quelle proprietà che si conservano per similitudine. Qualche autore (ad esempio Castagnoli e Peccati (1990), Jeffrey (1990)) usa la forma canonica di Schur per discutere il caso generale inerente le soluzioni del sistema (1), nel caso di autovalori non regolari.

Tuttavia, la forma triangolare non è la "migliore" alla quale si possa ridurre una matrice quadrata arbitraria. Una forma più "raffinata" è quella dovuta a Jordan (Camille Jordan, 1838-1922, matematico francese che, ispirato dagli studi pionieristici di Evariste Galois, scrisse il monumentale "Traité des Substitutions et des Equations Algébriques" (1870), ove compare la forma che in seguito è stata denominata con il suo cognome).

Definizione 3. Dicesi *blocco di Jordan di ordine* k o *matrice elementare di Jordan di ordine* k, $J_k(\lambda)$, una matrice quadrata di ordine k così composta:

- Gli elementi sulla diagonale principale sono tutti uguali a λ, essendo λ autovalore di A.
- Gli elementi sulla superdiagonale (la diagonale sopra la diagonale principale) sono tutti uguali a 1.
- Tutti gli altri elementi sono nulli.

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Notiamo subito che se k è l'ordine (o dimensione) di $J_k(\lambda)$, risulta $J_k(\lambda) = D + N$, dove

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $DN = ND$ e che $N^k = [0]$, ossia che la matrice N è *nilpotente di indice* k o *di ordine* k (si veda oltre la Definizione 5).

Un blocco di Jordan è quindi una matrice *bidiagonale,* nel senso che gli elementi non nulli si trovano su due sole diagonali della matrice. Si considerano blocchi di Jordan anche le matrici di ordine 1.

Teorema 3. Un blocco di Jordan $J_k(\lambda)$ ha un unico autovalore λ. La molteplicità geometrica di λ è 1, quella algebrica è k.

(Si veda, ad esempio, Schlesinger (2011)).

Definizione 4. Una matrice quadrata J si dice *matrice di Jordan* o *forma canonica di Jordan* o *matrice a blocchi di Jordan* se è una matrice diagonale a blocchi della forma

$$J = \begin{bmatrix} J_{k_1} & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & J_{k_2} & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & J_{k_r} \end{bmatrix}$$

in cui ciscun blocco J_{k_i}, $i = 1, ..., r$, è un blocco di Jordan.

Sussiste il seguente fondamentale risultato, che non dimostriamo (la letteratura sulla forma canonica di Jordan è imponente; nei riferimenti bibliografici indichiamo alcuni lavori ove i principali risultati vengono dimostrati). Indichiamo, per semplicità, con J_i il blocco di Jordan precedentemente indicato con J_{k_i}.

Teorema 4. (Teorema della forma di Jordan).

Sia A una matrice reale di ordine n. Allora A è simile a una matrice di Jordan, ossia esiste una *matrice di passaggio* (o *di transizione*) S, di ordine n e invertibile, tale che

$$A = SJS^{-1}$$

ossia

$$A = SJS^{-1}$$

essendo

$$J = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} J_1 & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & J_2 & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & J_r \end{bmatrix}$$

dove J_i, $i = 1, ..., r$, è un blocco di Jordan di ordine k_i, sulla cui diagonale principale si trova un autovalore di A. Lo stesso autovalore può comparire in blocchi differenti, ma il numero di questi blocchi è pari alla *molteplicità geometrica dell'autovalore.* La *somma degli ordini* di questi stessi blocchi è pari alla sua *molteplicità algebrica.* Inoltre la matrice di Jordan J è *unica,* a meno di permutazioni dei blocchi.

La trasposta di una matrice di Jordan è comunemente chiamata *matrice inferiore di Jordan* e ha le stesse proprietà delle matrici di Jordan di cui ci stiamo occupando. Un esempio di matrice di Jordan è il seguente.

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

La matrice J è in questo caso composta da tre blocchi di Jordan:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}; \quad [\lambda_3].$$

Un altro esempio è:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Qui i blocchi di Jordan sono

$$[\lambda_1]; \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

E' chiaro che le matrici diagonali possono essere considerate quali particolari matrici di Jordan con blocchi di ordine 1 e che la matrici di Jordan sono casi particolari di matrici triangolari. Possiamo anche dire che la matrice quadrata A è diagonalizzabile se e solo se la sua forma canonica di Jordan è composta da blocchi di Jordan di ordine 1. Vediamo di commentare il precedente teorema. Data una matrice quadrata A di ordine n e indicata con J la sua forma canonica di Jordan, si riconoscono le seguenti proprietà.

a) I termini λ_i che compaiono sulla diagonale principale di ogni blocco J_i sono autovalori di A. Se J_h e J_k sono blocchi distinti, non è escluso che sia $\lambda_h = \lambda_k$. In altre parole, in una matrice di Jordan possono esserci dei blocchi elementari con lo stesso autovalore λ_i. Si riveda il secondo esempio appena presentato.

b) Il numero dei blocchi in cui compare uno stesso autovalore λ_i è uguale alla sua *molteplicità geometrica*, $m^G(\lambda_i)$, e coincide dunque con la dimensione dell'autospazio corrispondente.

c) Se $m^A(\lambda_i)$ è la *molteplicità algebrica* di λ_i, allora risulta $1 \leqq m^G(\lambda_i) \leqq m^A(\lambda_i)$. Se vi sono più blocchi di Jordan relativi ad uno stesso autovalore λ_i, la somma delle dimensioni di tutti tali blocchi di Jordan è pari alla molteplicità algebrica di λ_i.

d) Come già detto, i blocchi hanno tutti ordine (o dimensione) 1 se e solo se A è diagonalizzabile, equivalentemente se e solo se A ammette n autovettori linearmente indipendenti, ovvero per ogni suo autovalore λ_i risulta $m^G(\lambda_i) = m^A(\lambda_i)$, ossia tutti gli autovalori sono *regolari.*

e) Se un autovalore λ_i non è reale, i blocchi relativi a λ_i e a $\bar{\lambda}_i$ sono in uguale numero e hanno la stessa dimensione.

f) Poichè la matrice J data dal Teorema 4 è *unica,* a meno di permutazioni dei blocchi, la struttura della forma canonica di Jordan è quindi unicamente determinata dagli elementi della matrice A.

g) La forma canonica di Jordan fornisce informazioni complete sulla natura degli autovalori di A. Per esempio, se la forma canonica di Jordan di A, di ordine 9, è la seguente

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

con blocchi

$$J_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad J_4 = [2], \quad J_5 = [2],$$

possiamo concludere che:

- La matrice A ha 3 autovalori distinti: $4, 3, 2$.
- $m^A(4) = 5$; $m^A(3) = 2$; $m^A(2) = 2$.
- $m^G(4) = 2$; $m^G(3) = 1$, $m^G(2) = 2$.

Si noti quindi che $\lambda = 2$ è autovalore *regolare.*

Notiamo fin d'ora che se J è una forma canonica di Jordan, allora un semplice calcolo mostra che è

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & e^{tJ_2} & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & e^{tJ_r} \end{bmatrix}.$$

Si tenga infatti presente che la forma di Jordan è per definizione una matrice diagonale a blocchi; questo comporta che la potenza k-esima della matrice di Jordan non è altro che una matrice diagonale a blocchi i cui blocchi diagonali sono dati dalle potenze k-esime dei singoli blocchi di Jordan. Ciò lascia sospettare che per determinare l'integrale generale di (1) nel caso che A non sia diagonalizzabile, possiamo procedere in modo analogo a quanto fatto per il caso di A diagonalizzabile, a patto di sapere calcolare la relativa forma canonica di Jordan e le varie matrici esponenziali dei singoli blocchi di Jordan.

Il prossimo Teorema 5 è una conseguenza del Teorema 4. Premettiamo la seguente definizione.

Definizione 5. Una matrice quadrata N si dice *nilpotente di indice* k o *di ordine* k se esiste un intero $k \geqq 1$ tale che $N^k = [0]$ e $N^{k-1} \neq [0]$.

Teorema 5. (Teorema di decomposizione di Jordan). Sia data A, matrice reale e quadrata di ordine n e siano $\lambda_1, ..., \lambda_n$ autovalori di A, anche non regolari. Allora esiste una matrice S di ordine n e invertibile, tale che

$$A = P + N$$

ove $P = S \cdot diag\,(\lambda_1, ..., \lambda_n) \cdot S^{-1}$ e la matrice N è nilpotente di ordine $k \leqq n$. Infine risulta $NP = PN$.

In altre parole il teorema afferma che ogni matrice quadrata è esprimibile come somma di una matrice diagonalizzabile e di una matrice nilpotente, matrici che inoltre commutano. Per la dimostrazione si può vedere, ad esempio, Hirsch e Smale (1974), Coddington e Levinson (1955).

Va notato che i precedenti due teoremi sono "teoremi di esistenza" ma non forniscono i metodi per calcolare in pratica la matrice di passaggio S che genera la forma di Jordan (ossia che "jordanizza" la matrice A). Può essere utile, allo scopo e senza addentrarci nella casistica completa, esaminare alcuni semplici esempi.

Esempio 5. Sia A di ordine 2 e abbia un autovalore *doppio* λ. Facciamo subito osservare che in tale caso la matrice è diagonalizzabile se e solo se ... è già in forma diagonale! Difatti, per essere A diagonalizzabile dovrà risultare

$$m^A(\lambda) = 2 = 2 - r(A - \lambda I) = m^G(\lambda),$$

ossia $r(A - \lambda I) = 0$, ossia $(A - \lambda I) = [0]$, ossia $A = \lambda I$.

Se A non è diagonale, con $m^A(\lambda) = 2$ e $m^G(\lambda) = 1$ (non può essere $m^G(\lambda) = 0!$), la sua forma di Jordan sarà

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Partiamo dalla relazione $S^{-1}AS = J$. Premoltiplichiamo entrambi i membri dell'uguaglianza per la matrice S. Si ottiene

$$AS = SJ$$

ossia

$$AS = S \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Denotate con v^1 e v^2 le colonne di S, la precedente relazione diventa

$$A(v^1; v^2) = (v^1; v^2) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ossia

$$(Av^1; Av^2) = (\lambda v^1; v^1 + \lambda v^2)$$

ossia

$$Av^1 = \lambda v^1; \;\; Av^2 = \lambda v^2 + v^1.$$

Quindi la prima colonna v^1 di S deve essere un autovettore di A associato a λ, mentre la seconda colonna di S deve soddisfare la relazione

$$Av^2 - \lambda v^2 = v^1, \quad \text{ossia } (A - \lambda I)v^2 = v^1. \tag{9}$$

Ma poichè $(A - \lambda I)v^1 = [0]$, moltiplicando ambo i membri della seconda uguaglianza nella (9) per $(A - \lambda I)$ otteniamo

$$(A - \lambda I)^2 v^2 = [0]\,,$$

essendo $(A - \lambda I)v^2 \neq [0]$.

Ad esempio, si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

che ammette l'autovalore $\lambda = 3$, doppio e non regolare in quanto è

$$m^G(\lambda) = 2 - r \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

Tale matrice ammette un solo autovettore linearmente indipendente, ad esempio

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Per trovare v^2 si dovrà risolvere il sistema

$$(A - 3I)v^2 = v^1$$

ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si trova che è, ad esempio,

$$v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$S = (v^1; v^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Di fatto si ottiene

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = J.$$

Esempio 6. Consideriamo ora una matrice di ordine 3 e vediamo quali casi possono presentarsi.

• 1° caso. La matrice ha 3 autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e quindi 3 autovettori linearmente indipendenti. La matrice è diagonalizzabile e la sua forma canonica di Jordan è la matrice diagonale

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

• 2° caso.

A) La matrice ha un autovalore doppio λ_1 regolare e un autovalore semplice λ_2. La matrice è perciò diagonalizzabile e la sua forma canonica di Jordan è

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

B) La matrice ha un autovalore doppio *non* regolare λ_1 e un autovalore semplice λ_2, con due autovettori linearmente indipendenti ($m^A(\lambda_1) = 2 \neq m^G(\lambda_1) = 1$). La sua forma canonica di Jordan è del tipo

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

• 3° caso.

A) La matrice ha un autovalore triplo λ_1 regolare ($m^A(\lambda_1) = m^G(\lambda_1) = 3$); quindi a λ_1 sono associati 3 autovettori linearmente indipendenti. La sua forma canonica di Jordan è

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

B) La matrice ha un autovalore triplo λ_1 e due autovettori linearmente indipendenti ($m^A(\lambda_1) = 3$; $m^G(\lambda_1) = 2$). La sua forma canonica di Jordan è del tipo

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

C) La matrice ha un autovalore triplo λ_1 e un solo autovettore linearmente indipendente ($m^A(\lambda_1) = 3$; $m^G(\lambda_1) = 1$). La sua forma canonica di Jordan è del tipo

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Vediamo adesso la struttura della matrice di transizione S nel caso di un solo autovalore triplo di A non diagonalizzabile, ossia il 3° caso, sottocaso B e sottocaso C.

• Sottocaso B): $m^A(\lambda) = 3$; $m^G(\lambda) = 2$. Denotate con v^1, v^2, v^3 le colonne di S, con riferimento alla forma canonica di Jordan del caso in esame, la relazione $AS = SJ$ implica:

- $ASe^1 = SJe^1$, da cui $Av^1 = S(\lambda e^1) = \lambda v^1$;
- $ASe^2 = SJe^2$, da cui $Av^2 = S(e^1 + \lambda e^2) = v^1 + \lambda v^2$;
- $ASe^3 = SJe^3$, da cui $Av^3 = S\lambda e^3 = \lambda v^3$.

Ne consegue che la prima e la terza colonna di S sono costituite da due autovettori linearmente indipendenti associati a λ, mentre la seconda colonna si ottiene risolvendo il sistema lineare

$$(A - \lambda I)v^2 = v^1,$$

ossia, essendo $(A - \lambda I)v^1 = [0]$,

$$(A - \lambda I)^2 v^2 = [0],$$

essendo $(A - \lambda I)v^2 \neq [0]$.

• Sottocaso C): $m^A(\lambda) = 3$; $m^G(\lambda) = 1$. Denotate con v^1, v^2, v^3 le colonne di S, con riferimento alla forma canonica di Jordan del caso in esame, la relazione $AS = SJ$ implica:

- $ASe^1 = SJe^1$, da cui $Av^1 = S(\lambda e^1) = \lambda v^1$;
- $ASe^2 = SJe^2$, da cui $Av^2 = S(e^1 + \lambda e^2) = v^1 + \lambda v^2$;

- $ASe^3 = SJe^3$, da cui $Av^3 = S(e^2 + \lambda e^3) = v^2 + \lambda v^3$.

Ne consegue che la prima colonna di S è costituita da un autovettore associato a λ, mentre la seconda e la terza colonna si ottengono, rispettivamente, risolvendo i sistemi lineari

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)v^2 &= v^1; \\ (A - \lambda I)v^3 &= v^2. \end{aligned}$$

Si osservi che, essendo $(A - \lambda I)v^1 = [0]$, si ha

$$(A - \lambda I)^2 v^2 = [0]\,,$$

essendo $(A - \lambda I)v^2 \neq [0]$, e quindi

$$(A - \lambda I)^2 (A - \lambda I)v^3 = (A - \lambda I)^2 v^2 = [0]\,,$$

ossia

$$(A - \lambda I)^3 v^3 = [0]\,,$$

essendo $(A - \lambda I)^2 v^3 \neq [0]$.

Esempio 7. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Risulta $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)^3$, per cui si ha un unico autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica pari a 3. Gli autovettori associati a tale autovalore si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \, \alpha \neq 0.$$

Ne consegue che la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è uguale a 1 e quindi la matrice *non* è diagonalizzabile. Controprova: $m^G(\lambda) = 3 - r(A - 2I) =$

$$= 3 - r \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Conseguentemente, la prima colonna di S (che indicheremo con v^1) è costituita da un autovettore associato a $\lambda = 2$; scegliamo $v^1 = [1, 1, 1]^\top$.

La seconda e la terza colonna di S si ottengono rispettivamente risolvendo i sistemi lineari

$$(A - \lambda I)v^2 = v^1; \quad (A - \lambda I)v^3 = v^2.$$

Ad esempio, si possono scegliere come seconda e terza colonna di S, rispettivamente,

$$v^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una possibile matrice di transizione S è allora data da

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Risulta poi

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J.$$

Esempio 8. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Risulta $\det(A - \lambda I) = -(3 + \lambda)^3$, per cui si ha un unico autovalore $\lambda = 3$, con molteplicità algebrica pari a 3.

Gli autovettori associati a tale autovalore si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad v_3 \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq 0.$$

Ne consegue che la molteplicità geometrica di $\lambda = -3$ è uguale a 2 e quindi la matrice A non è diagonalizzabile. Controprova:

$$m^G(\lambda) = 3 - r(A + 3I) = 3 - r \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Per determinare una matrice S di transizione occorre tenere presente che l'autovettore v^1 che va a costituire la prima colonna di S deve essere tale da garantire che il sistema $(A-\lambda I)v^2 = v^1$ abbia soluzioni. Ad esempio, se si sceglie come autovettore $v^1 = [1,1,0]^\top$, il sistema $(A-\lambda I)v^2 = v^1$ *non ha soluzioni,* mentre se scegliamo $v^1 = [1,1,1]^\top$ si ottiene un sistema che ha soluzioni, tra le quali, ad esempio, $v^2 = [1,0,0]^\top$. Come terza colonna si sceglie un autovettore v^3 linearmente indipendente da v^1 e da v^2 (la matrice S deve essere invertibile!), ad esempio $v^3 = [1,1,0]^\top$.

Una possibile matrice di transizione S è data da

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Questo esempio mostra che è sempre possibile costruire la matrice di transizione S, non singolare, che genera la forma canonica di Jordan, ma che non sempre *qualsiasi* autovettore porta alla costruzione di S.

I precedenti esempi e le precedenti considerazioni inducono la seguente definizione.

Definizione 6. Sia λ un autovalore della matrice quadrata A. Un vettore $v \neq [0]$ tale che

$$(A-\lambda I)^k v = [0] \tag{10}$$

per qualche intero positivo k, si dice *autovettore generalizzato* di A associato all'autovalore λ. Il più piccolo intero k per il quale vale la relazione (10) si dice *indice* dell'autovettore generalizzato.

Ovviamente, se v è autovettore generalizzato di indice 1, allora v altro non è che un autovettore usuale associato a λ, della matrice A. Si noti poi che dalla definizione segue che v è autovettore generalizzato di A relativo a λ, di indice k se $(A-\lambda I)^{k-1}v \neq [0]$ e $(A-\lambda I)^k v = [0]$.

Dato un autovalore λ di A, denotiamo con E_λ il relativo *autospazio* o *spazio invariante* (associato a λ):

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n : (A-\lambda I)v = [0]\},$$

ossia

$$E_\lambda = \ker(A-\lambda I).$$

Denotiamo con $\tilde{E}_\lambda$ *l'autospazio generalizzato* di λ, ossia

$$\tilde{E}_\lambda = \left\{v \in \mathbb{C}^n : (A-\lambda I)^k v = [0] \text{ per qualche } k \geqq 1\right\}.$$

Qualche autore (ad esempio Schlesinger (2011)) chiama $\tilde{E}_\lambda$ *sottospazio radicale* di A relativo all'autovalore λ. E' infatti facile verificare che $\tilde{E}_\lambda$ è un sottospazio lineare (è il nucleo della matrice $(A-\lambda I)^k$). I vettori non nulli di $\tilde{E}_\lambda$ sono gli autovettori generalizzati di A relativi all'autovalore λ. In particolare, l'autospazio generalizzato di λ contiene l'autospazio di λ :

$$E_\lambda \subset \tilde{E}_\lambda.$$

Si dimostra il seguente risultato.

Teorema 6. Sia data la matrice quadrata A di ordine n e sia λ un suo autovalore con molteplicità algebrica $m : m^A(\lambda) = m$. Allora $\tilde{E}_\lambda$, con $k > 1$, è un sottospazio lineare di $\mathbb{C}^n$ di dimensione m.

Se $k = 1$, la dimensione di $\tilde{E}_\lambda = E_\lambda$ è, come noto, $n - r(A - \lambda I)$. Per esempio, se consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix},$$

risulta $\det(A-\lambda I) = (\lambda-2)^2$ e quindi la matrice ha l'autovalore doppio $\lambda = 2$, ossia $m^A(2) = 2$. E' poi

$$m^G(2) = 2 - r\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

Un autovettore è, ad esempio, $u = (1, 2)^\top$.

Risulta poi $(A - 2I)^2 = [0]$. Quindi, ad esempio e^1=$(1, 0)^\top$ e $e^2 = (0, 1)^\top$ sono entrambi autovettori generalizzati di indice 2 associati a $\lambda = 2$. Infatti $(A-2I)e^1 \neq [0]$ e $(A-2I)e^2 \neq [0]$. Ovviamente e^1 e e^2 generano l'intero $\mathbb{R}^2 = \tilde{E}_2$ e quindi $\tilde{E}_2$ ha dimensione $2 = m^A(2)$.

Ritorniamo alla Definizione 6 per fare le seguenti considerazioni. Sia v^k un autovettore generalizzato di indice $k > 1$ associato all'autovalore λ; poniamo

$$v^{k-1} = (A - \lambda I)v^k.$$

Notiamo che v^{k-1} è autovettore generalizzato di indice $k - 1$, associato all'autovalore λ. Infatti si ha

$$(A - \lambda I)^{k-1}v^{k-1} = (A - \lambda I)^{k-1}(A - \lambda I)v^k = (A - \lambda I)^k v^k = [0]\,,$$

essendo

$$(A - \lambda I)^{k-2}v^{k-1} = (A - \lambda I)^{k-2}(A - \lambda I)v^k = (A - \lambda I)^{k-1}v^k \neq [0]\,.$$

Così procedendo, possiamo induttivamente definire i seguenti autovettori generalizzati:

$$\begin{aligned} v^{k-2} &= (A - \lambda I)v^{k-1} = (A - \lambda I)^2 v^k \\ v^{k-3} &= (A - \lambda I)v^{k-2} = (A - \lambda I)^2 v^{k-1} = (A - \lambda I)^3 v^k \\ &\vdots \\ v^1 &= (A - \lambda I)v^2 = ... = (A - \lambda I)^{k-1}v^k. \end{aligned}$$

Ogni v^i è autovettore generalizzato di indice i associato all'autovalore λ.

Definizione 7. (Catena di autovettori generalizzati). Se $\{v^1, ..., v^k\}$ è un insieme di autovettori generalizzati associati all'autovalore λ di A, tali che v^k è autovettore generalizzato di indice k e inoltre

$$\begin{aligned}
v^{k-1} &= (A-\lambda I)v^k; \\
v^{k-2} &= (A-\lambda I)v^{k-1}; \\
v^{k-3} &= (A-\lambda I)v^{k-2}; \\
&\quad \cdots\cdots\cdots \\
v^{2} &= (A-\lambda I)v^{3}; \\
v^{1} &= (A-\lambda I)v^{2},
\end{aligned}$$

allora $\left\{v^1,...,v^k\right\}$ è una *catena di autovettori generalizzati di lunghezza* k, relativi all'autovalore λ di A. Il vettore v^k è la *fine* ("top") della catena, il vettore v^1 (che è un usuale autovettore di A associato a λ) è *l'inizio* ("bottom") della catena.

Osservazione 2. E' importante notare che una catena di autovettori generalizzati $\left\{v^1,...,v^k\right\}$ è interamente determinata dal vettore v^k del "top" della catena, nel senso che se abbiamo a disposizione v^k, non ci sono problemi a scegliere v^{k-1} : il vettore v^{k-1} è determinato dall'equazione $v^{k-1}=(A-\lambda I)v^k$; così il vettore v^{k-2} è determinato dall'equazione $v^{k-2}=(A-\lambda I)v^{k-1}$, ecc. Può invece essere più complicato, soprattutto se $n>3$, determinare i vari autovettori generalizzati della catena, a partire dal "bottom", come accade in pratica.

Ritorniamo alla *forma canonica di Jordan* della matrice A, di ordine n. Abbiamo visto che tale forma canonica di Jordan è costituita da un certo numero di blocchi di Jordan $J_1, J_{2,}..., J_r$ sulla diagonale principale. Consideriamo ora, per semplicità, il caso in cui J consiste di *un solo blocco,* di ordine n :

$$J=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

ove $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$J-\lambda I=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Siano $e^1, e^2, ..., e^n$ gli n vettori fondamentali di $\mathbb{R}^n$. Risulta

$$\begin{aligned}
(J-\lambda I)e^n &= e^{n-1}; \\
(J-\lambda I)e^{n-1} &= e^{n-2}; \\
&\vdots \\
(J-\lambda I)e^2 &= e^1; \\
(J-\lambda I)e^1 &= [0] \, .
\end{aligned}$$

Ossia risulta che $\{e^1, e^2, ..., e^n\}$ è una catena di autovettori generalizzati di lunghezza n. Ovviamente $\{e^1, e^2, ..., e^n\}$ sono linearmente indipendenti e quindi $\tilde{E}_\lambda = \mathbb{R}^n$.

Tale situazione si riproduce anche quando consideriamo una qualsiasi matrice A di ordine n avente una singola catena di autovettori generalizzati di lunghezza n.

Teorema 7. Sia $\{v^1, v^2, ..., v^n\}$ una catena di autovettori generalizzati di lunghezza n associati all'unico autovalore λ, di molteplicità algebrica pari a n, della matrice A di ordine n. Allora $\{v^1, v^2, ..., v^n\}$ è un insieme linearmente indipendente.

Dim. Consideriamo la combinazione lineare

$$c_1 v^1 + c_2 v^2 + ... + c_n v^n = [0] \, .$$

Dobbiamo fare vedere che ogni coefficiente c_i è nullo. Dalla definizione di catena di autovettori generalizzati, risulta, per ogni i,

$$v^{n-i} = (A - \lambda I)^i v^n,$$

cosicchè possiamo riscrivere la suddetta combinazione lineare nella forma

$$c_1(A-\lambda I)^{n-1}v^n + c_2(A-\lambda I)^{n-2}v^n + ... + c_{n-1}(A-\lambda I)v^n + c_n v^n = [0] \, .$$

Moltiplichiamo ambo i membri di tale uguaglianza per $(A-\lambda I)^{n-1}$. Otteniamo

$$c_1(A-\lambda I)^{2n-2}v^n + c_2(A-\lambda I)^{2n-3}v^n + ... + c_{n-1}(A-\lambda I)^n v^n + c_n(A-\lambda I)^{n-1}v^n = [0] \, .$$

Risulta $(A-\lambda I)^{n-1}v^n = v^1 \neq [0]$. Tuttavia, $(A-\lambda I)^n v^n = [0]$ e quindi risulterà pure $(A-\lambda I)^{n+1}v^n = (A-\lambda I)(A-\lambda I)^n v^n = (A-\lambda I)\,[0] = [0]$.

Similmente risulterà $(A-\lambda I)^{n+2}v^n = [0]\, , ..., (A-\lambda I)^{2n-2}v^n = [0]$, quindi ogni termine, tranne l'ultimo, è nullo e l'uguaglianza diventa

$$c_n v^1 = [0] \, .$$

Poichè $v^1 \neq [0]$, dovrà essere $c_n = 0$, quindi la nostra combinazione lineare è

$$c_1 v^1 + c_2 v^2 + ... + c_{n-1} v^{n-1} = [0] \, .$$

Ripetendo la stessa procedura, stavolta moltiplicando per $(A - \lambda I)^{n-2}$, anzichè per $(A - \lambda I)^{n-1}$, otteniamo alla fine

$$c_{n-1} v^1 = [0]$$

e poichè $v^1 \neq [0]$, dovrà essere $c_{n-1} = 0$. Così procedendo si ottiene alla fine

$$c_1 = c_2 = ... = c_{n-1} = c_n = 0,$$

il che mostra che $\{v^1, v^2, ..., v^n\}$ è un insieme linearmente indipendente. □

Teorema 8. Sia A una matrice di ordine n e sia $\{v^1, v^2, ..., v^n\}$ una catena di autovettori generalizzati di lunghezza n, che forma una base in $\mathbb{C}^n$, autovettori associati all'unico autovalore λ di A, di molteplicità algebrica pari ad n. Allora risulta

$$A = SJS^{-1},$$

ove

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

è un singolo blocco di Jordan e ove

$$S = \left[v^1, v^2, ..., v^n\right].$$

I precedenti risultati possono essere generalizzati. Si veda, ad esempio, Gilardi (1996), Noble e Daniel (1998), Pontriaguine (1975), Schlesinger (2011).

Definizione 8. Data una matrice A quadrata di ordine n, si dice *base di Jordan* per A una base di $\mathbb{C}^n$ data dall'unione di un certo numero di catene di autovettori generalizzati di A, a due a due disgiunte.

Teorema 9. Sia data la matrice A, di ordine n e avente quali autovalori, semplici o ripetuti, anche non regolari, $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Allora esiste in $\mathbb{C}^n$ una base di Jordan formata da catene di autovettori generalizzati che complessivamente danno luogo ai vettori linearmente indipendenti $h^1, h^2, ..., h^n$ e tali che, posto $S = [h^1, h^2, ..., h^n]$, risulta

$$A = SJS^{-1},$$

cioè

$$A = P + N,$$

ove $P = S \cdot diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) \cdot S^{-1}$ e la matrice N è nilpotente di ordine $k \leqq n$. Infine risulta $NP = PN$.

Rimandando alle opere citate e alle altre elencate nei Riferimenti Bibliografici per le dimostrazioni dei risultati generali relativi alla forma canonica di Jordan, vogliamo ribadire l'importanza degli autovettori generalizzati nella costruzione della matrice di transizione S che "jordanizza" A. Gli esempi numerici che abbiamo presentato dovrebbero fare un pò di luce su tale questione, questione che viene qui di seguito brevemente ripresa (si darà ancora più avanti qualche altra nozione sull'algoritmo che permette la costruzione di S). A tale fine, come nel Teorema 9, indichiamo con $h^1, h^2, ..., h^n$ le colonne di S e notiamo che da $J = S^{-1}AS$ si ricava $SJ = AS$, ossia

$$S \begin{bmatrix} J_1 & \cdots & [0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & \cdots & J_r \end{bmatrix} = AS.$$

Denotiamo con q_i la dimensione (ossia l'ordine) del blocco J_i, $i = 1, ..., r$, e limitiamoci per semplicità ai calcoli inerenti il primo blocco J_1, di dimensione q_1. Abbiamo

$$Ah^1 = ASe^1 = SJe^1 = S\lambda_1 e^1 = \lambda_1 h^1,$$

dove, come al solito,

$$e^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Proseguendo, si ha

$$\begin{aligned} Ah^2 &= ASe^2 = SJe^2 = S(1, \lambda_1, 0, ..., 0)^\top = \\ &= S(\lambda_1 e^2 + e^1) = \lambda_1 h^2 + h^1. \end{aligned}$$

Analogamente si trova

$$Ah^3 = \lambda_1 h^3 + h^2$$

e proseguendo si arriva a

$$Ah^{q_1} = \lambda_1 h^{q_1} + h^{q_1 - 1}.$$

In sintesi, abbiamo visto che h^1 è un usuale autovettore relativo all'autovalore λ_1 che compare nel blocco J_1, mentre i vettori $h^2, ..., h^{q_1}$ sono dati, in successione, dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (A - \lambda_1)h^2 = h^1 \\ \qquad \vdots \\ (A - \lambda_1)h^{q_1} = h^{q_1 - 1}. \end{cases} \tag{11}$$

Siamo quindi pervenuti a una catena di autovettori generalizzati, relativi all'autovalore λ_1 che compare nel blocco J_1. Analogamente per gli altri blocchi di Jordan: proseguendo si troverà che h^{q_1+1} è un autovettore relativo all'autovalore λ_2 (il quale può, si badi, coincidere con λ_1)

che compare nel blocco J_2. Se la dimensione di J_2 è maggiore di 1, seguiranno poi autovettori generalizzati relativi a λ_2, e così via.

In definitiva, si procederà secondo i seguenti passaggi fondamentali (si veda Baciotti e Ricci (1991)):

(a) Si risolve l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$, determinando gli autovalori λ_i con le rispettive molteplicità algebriche m_i^A, denotate anche con $m^A(\lambda_i)$.

(b) Si risolvono i sistemi $(A - \lambda_i)v^i = [0]$, determinando così l'autospazio relativo a ciascun autovalore λ_i e la sua dimensione, ossia la molteplicità geometrica di λ_i, m_i^G, denotata anche con $m^G(\lambda_i)$.

Se per qualche i risulta $m_i^G < m_i^A$, ciò segnala la presenza di almeno un blocco di Jordan relativo all'autovalore λ_i, blocco di dimensione maggiore di 1. Occorre allora calcolare gli autovettori generalizzati relativi a tali blocchi, risolvendo uno o più sistemi algebrici del tipo (11), cha danno luogo a catene di autovettori generalizzati.

Quest'ultima parte del procedimento può risultare piuttosto complicata, per $n > 3$, se la molteplicità geometrica di qualche λ_i è maggiore di 1, e cioè se ci sono più blocchi di Jordan con lo stesso autovalore λ_i. In tale caso infatti potrebbero esserci autovettori generalizzati relativi a λ_i ottenuti a partire da blocchi diversi (risolvendo cioè più catene di sistemi del tipo (11)). Se invece a λ_i compete un solo blocco di Jordan, sarà sufficiente risolvere un'unica catena di sistemi del tipo (11). Tuttavia, anche in questo caso, se si fanno i conti con carta e penna, la procedura potrebbe essere alquanto lunga. Una descrizione dettagliata dell'algoritmo per la costruzione della matrice di transizione S che "jordanizza" la matrice A, si trova nel testo di Nicholson (2002). Si veda anche, ad esempio, Noble e Daniel (1998), Mayer (2000). Anche a costo di ripeterci, possiamo riassumere tale algoritmo considerando due casi:

A) Caso particolare di autovalori distinti per blocchi di Jordan distinti (A di ordine n).

- 1. Calcoliamo gli autovalori λ_1, $\lambda_2, ..., \lambda_r$ di A con le rispettive molteplicità algebriche m_1, $m_2, ..., m_r$ ($m_1 + m_2 + ... + m_r = n$), ciascuno di molteplicità geometrica 1 (ciò equivale al fatto che blocchi distinti hanno autovalori distinti).

- 2. Sia λ un autovalore con molteplicità algebrica m. Calcoliamo $\ker(A - \lambda I)^k$, per $k = 1, 2, ..., m$.

- 3. Scegliamo $v^m \in \ker(A - \lambda I)^m$, $v^m \notin \ker(A - \lambda I)^k$, $\forall k < m$. Definiamo la base

$$\mathcal{B} = \left\{v^m, v^{m-1} = (A - \lambda I)v^m, v^{m-2} = (A - \lambda I)^2 v^m, ..., v^1 = (A - \lambda I)^{m-1} v^m\right\}.$$

- 4. La forma canonica di Jordan di A è $S^{-1}AS$, ove S ha per colonne i vettori $v^1 = (A - \lambda I)^{m-1} v^m$, $v^2 = (A - \lambda I)^{m-2} v^m, ..., v^m$.

B) Caso generale (A di ordine n).

- 1. Calcoliamo gli autovalori λ_1, $\lambda_2, ..., \lambda_r$ di A, con le rispettive molteplicità algebriche m_1, $m_2, ..., m_r$ e molteplicità geometriche $n_1, n_2, ..., n_r$ (dunque ci saranno n_1 blocchi di Jordan per λ_1, n_2 per λ_2, ecc.).

- 2. Sia λ un autovalore con molteplicità algebrica m e geometrica r $(1 \leqq r \leqq m)$. Questo autovalore corrisponde a r blocchi di Jordan. Per costruirli, calcoliamo $\ker(A-\lambda I)^k$, per $k = 1, ...,$ fino a che $\dim(\ker(A-\lambda I)^s) = m$. In generale $s < m$, perchè $s = m$ se e solo se abbiamo un solo blocco di Jordan.

- 3. Sia $\{v^1, ..., v^m\}$ base di $\ker(A-\lambda I)^s$. Definiamo la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} v^1, (A-\lambda I)v^1, ..., (A-\lambda I)^{s-1}v^1, \\ v^2, (A-\lambda I)v^2, ..., (A-\lambda I)^{s-1}v^2, \\ .... \\ v^m, (A-\lambda I)v^m, ..., (A-\lambda I)^{s-1}v^m \end{array} \right\}.$$

(Non necessariamente si hanno tutti i termini sino a $(A-\lambda I)^{s-1}v^i$).

- 4. La forma canonica di Jordan di A è data da $S^{-1}AS$, ove S è la matrice che ha per colonne i vettori della base $\mathcal{B}$.

Alla luce di quanto appena detto, si invita il lettore a riguardare gli esempi numerici precedentemente forniti. Illustriamo la procedura con due ulteriori esempi.

Esempio 10. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo un unico autovalore $\lambda = 2$ e l'autospazio E_2 associato a $\lambda = 2$ è *span* $\{(1,0,0), (0,2,1)\}$. Il fatto che $\ker(A-2I)$ abbia dimensione 2 ci fa capire che l'autovalore 2 appartiene a due blocchi di Jordan distinti. Poichè $\ker(A-2I)^2 = [0]$ possiamo scegliere v^3 a piacere (purchè lineramente indipendente con i vettori di E_2 perchè dovranno formare una base!). Ad esempio prendiamo $v^3 = (0,1,0)$. Abbiamo allora

$$(A-2I)v^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Definiamo $v^2 = (4,-2,-1)$. Si noti che $v^2 \in E_2$ come infatti la teoria ci garantisce. Infine prendiamo $v^1 = (1,0,0)$, scegliendolo in E_2 linearmente indipendente con v^2. Abbiamo pertanto la seguente forma di Jordan per A :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esempio 11. Sia J la seguente forma canonica di Jordan.

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

formata dai tre blocchi

$$[\lambda_1]\,; \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Si ha allora

$$A(v^1, v^2, ..., v^6) = (v^1, v^2, ..., v^6)J$$

e quindi il sistema da risolvere per trovare la matrice di transizione $S = (v^1, v^2, ..., v^6)$ è il seguente

$$\begin{cases} Av^1 = \lambda_1 v^1 \Longrightarrow (A - \lambda_1 I)v^1 = [0] \\ Av^2 = \lambda_1 v^2 \Longrightarrow (A - \lambda_1 I)v^2 = [0] \\ Av^3 = v^2 + \lambda_1 v^3 \Longrightarrow (A - \lambda_1 I)v^3 = v^2 \\ Av^4 = \lambda_2 v^4 \Longrightarrow (A - \lambda_2 I)v^4 = [0] \\ Av^5 = v^4 + \lambda_2 v^5 \Longrightarrow (A - \lambda_2 I)v^5 = v^4 \\ Av^6 = v^5 + \lambda_2 v^6 \Longrightarrow (A - \lambda_2 I)v^6 = v^5. \end{cases}$$

Concludiamo il presente paragrafo con la seguente osservazione. In base al Teorema 9 abbiamo una conseguenza abbastanza importante per il calcolo della matrice esponenziale e^A, allorché A non sia diagonalizzabile. Il fatto che le matrici P e N commutino implica

$$e^A = e^P \cdot e^N.$$

Quindi

$$e^A = e^{P+N} = e^P \cdot e^N = S \cdot diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}) \cdot S^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{N^j}{j!},$$

essendo N nilpotente di ordine $k \leqq n$.

Se A ammette anche autovalori complessi (a coppie coniugate) e desideriamo calcolare e^A in termini reali, ciò è sempre possibile, sfruttando le solite (si fa per dire!) *formule di Eulero* per il seno e il coseno. Siano $\lambda_1, ..., \lambda_k$ autovalori reali e $\lambda_j = a_j + ib_j$, $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$, $j = k+1, ..., k+m$ autovalori complessi di A (con $k + 2m = n$). Una volta determinati i corrispondenti autovettori, eventualmente generalizzati, della matrice A, denotiamo con $u^1, ..., u^k$ quelli corrispondenti agli autovettori reali e con $u^j = v^j + iw^j$, $\bar{u}^j = v^j - iw^j$, le coppie di autovettori coniugati (eventualmente generalizzati) corrispondenti agli autovalori complessi λ_j e $\bar{\lambda}_j$, $j = k+1, ..., k+m$. Posto allora

$$S = \left[u^1, ..., u^k, v^{k+1}, w^{k+1}, ..., v^{k+m}, w^{k+m}\right],$$

risulta

$$e^A = S \cdot diag\left(e^{\lambda_j}, e^{a_j}\begin{pmatrix} \cos b_j & -\sin b_j \\ \sin b_j & \cos b_j \end{pmatrix}\right) \cdot S^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{N^j}{j!}.$$

Esempio 12. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ammette $\lambda = 1$ come autovalore di molteplicità algebrica 2. Risulta però

$$m^G(\lambda) = 2 - r(A - I) = 2 - r\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

Risulta essere

$$e = e^P \cdot e^N = S\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} S^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{N^j}{j!} = SeIS^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{N^j}{j!}.$$

In tal caso $P = I$ e quindi

$$N = A - P = A - I = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $N^2 = [0]$, perciò $k = 2$ e quindi

$$e^A = e^I \cdot e^N = e(I + N) = eA.$$

5. Applicazione della Forma di Jordan alla Risoluzione del Sistema (1)

In base a quanto detto nella parte finale del paragrafo precedente, possiamo quindi affermare che se abbiamo un sistema omogeneo del tipo (1), ossia

$$x'(t) = Ax(t),$$

con A matrice quadrata di ordine n, avente n autovalori, anche non regolari, detta S la matrice di transizione che realizza la forma canonica di Jordan relativa ad A e posto

$$A = P + N,$$

ove $P = S \cdot diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \cdot S^{-1}$, e N è nilpotente di ordine $k \leqq n$ (e inoltre $PN = NP$), si ottiene la formula

$$x(t) = e^{At}c = e^{Pt} \cdot e^{Nt} \cdot c =$$
$$= S \cdot diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \cdot S^{-1} \cdot \left(I + Nt + ... + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \right) \cdot c.$$

Se ci sono autovalori reali $\lambda_1, ..., \lambda_k$ e complessi coniugati $\lambda_j = a_j + ib_j$, $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$, $j = k+1, ..., k+m$, con $k + 2m = n$, è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^n$ che formi la matrice di passaggio S :

$$S = \left[u^1, ..., u^k, v^{k+1}, w^{k+1}, ..., v^{k+m}, w^{k+m} \right]$$

dove $u^j = v^j \pm iw^j$ sono gli autovettori (eventualmente generalizzati) corrispondenti a $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$.

Si ha allora

$$x(t) \ = \ e^{At}c = S \cdot diag \left[e^{\lambda_j t}, e^{a_j t} \begin{pmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{pmatrix} \right] \cdot S^{-1} \cdot \left(I + Nt + ... + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \right) \cdot c.$$

Esempio 13. Risolviamo il sistema

$$x'(t) = Ax(t)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si veda l'Esempio 12. Si ha

$$e^{At} = e^{Pt} \cdot e^{Nt} = S \cdot diag \left(e^t, e^t \right) \cdot S^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(Nt)^j}{j!} = e^t \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(Nt)^j}{j!}.$$

In tal caso $P = I$ e quindi

$$N = A - P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $N^2 = [0]$, per cui $k = 2$ e pertanto la soluzione generale del sistema è

$$x(t) = e^{At}c = e^t(I + Nt)c =$$
$$= e^t \left(I + \begin{pmatrix} 2t & -4t \\ t & -2t \end{pmatrix} \right) c =$$
$$= e^t \begin{pmatrix} 1+2t & -4t \\ t & 1-2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} x_1(t) = e^t(c_1(1+2t) - 4c_2 t) \\ x_2(t) = e^t(c_1(t) + c_2(1-2t)), \end{cases}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

La particolare struttura della forma canonica di Jordan permette però di essere più dettagliati nella determinazione della soluzione generale del sistema

$$x'(t) = Ax(t)$$

allorché A sia non diagonalizzabile.

Prima di procedere, osserviamo che anche nel caso di A non diagonalizzabile, similmente a quanto operato nel paragrafo 1, potremmo procedere come segue (si veda, ad esempio, Weintraub (2008)).

- 1. Si determini la matrice di Jordan J associata alla matrice A, ossia si abbia

$$A = SJS^{-1}$$

di modo che il sistema diventi

$$x'(t) = (SJS^{-1})x(t) \Longrightarrow x'(t) = SJ(S^{-1}x(t)) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S^{-1}x'(t) = J(S^{-1}x(t)) \Longrightarrow (S^{-1}x(t))' = J(S^{-1}x(t)).$$

Essendo infatti S^{-1} fatta di costanti, risulta $(S^{-1}x(t))' = S^{-1}x'(t)$.

- 2. Ponendo $z(t) = S^{-1}x(t)$, il sistema diventa

$$z'(t) = Jz(t). \tag{12}$$

Occorre quindi risolvere tale sistema, ove la matrice è una forma di Jordan, ossia una matrice bidiagonale.

Si può anche, senza perdere di generalità, supporre che J consista di un solo blocco elementare di Jordan, dal momento che le funzioni coinvolte in un dato blocco elementare non compaiono mai nelle equazioni relative a blocchi diversi, per come è strutturata la forma canonica di Jordan. Sia quindi J consistente di un singolo blocco di Jordan, di ordine n, ossia

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Con tale ipotesi, analizziamo la soluzione del sistema (12). L'ultima equazione risulta $z'_n = \lambda z_n$ e quindi ha come soluzione generale $z_n(t) = c_n e^{\lambda t}$. La penultima equazione diventa così

$$z'_{n-1} = \lambda z_{n-1} + c_n e^{\lambda t},$$

per cui la sua soluzione generale risulta essere $z_{n-1}(t) = c_{n-1}e^{\lambda t} + c_n t e^{\lambda t}$, dal momento che una primitiva $F(t)$ di $e^{-\lambda t} c_n e^{\lambda t} = c_n$ è $c_n t$.

L'equazione relativa a z_{n-2} è

$$z'_{n-2} = \lambda z_{n-2} + c_{n-1}e^{\lambda t} + c_n t e^{\lambda t}$$

e, come si può notare facilmente, si ha che una primitiva $F(t)$ di $e^{-\lambda t}(c_{n-1}e^{\lambda t} + c_n t e^{\lambda t}) = c_{n-1} + c_n t$ risulta

$$c_{n-1}t + c_n \frac{t^2}{2}.$$

Quindi la soluzione generale è

$$z_{n-2}(t) = c_{n-2}e^{\lambda t} + c_{n-1}te^{\lambda t} + c_n \frac{t^2}{2} e^{\lambda t}.$$

Procedendo con questo ragionamento si ottiene che la soluzione generale relativa all'i-esima equazione è

$$z_i(t) = c_i e^{\lambda t} + c_{i+1}te^{\lambda t} + \dots + c_{i+j}\frac{t^j}{j!}e^{\lambda t} + \dots + c_{n-1}\frac{t^{n-1-i}}{(n-1-i)!}e^{\lambda t} + c_n \frac{t^{n-i}}{(n-i)!}e^{\lambda t}.$$

La soluzione generale del sistema omogeneo (12), con le ipotesi fatte, può così essere espressa in forma compatta:

$$z(t) = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}.$$

\- 3. Poiché $z(t) = S^{-1}x(t)$, abbiamo che la soluzione del sistema originale è

$$x(t) = Sz(t).$$

Il discorso può essere esteso al caso generale: supponiamo adesso che la matrice J di $z'(t) = Jz(t)$ sia una matrice quadrata di ordine n formata dai blocchi di Jordan $J_1, ..., J_r$. Consideriamo l'i-esimo blocco elementare di Jordan J_i, $1 \leqq i \leqq r$. La soluzione $z_i(t)$ è già stata ottenuta (con le dovute sostituzioni riguardanti l'autovalore e l'ordine della matrice: quindi $\lambda = \lambda_i$ e $n = n_i$). Chiamata $K_i(t)$ la matrice che si ottiene moltiplicando $e^{\lambda_i t}$ per la matrice quadrata che compare nella soluzione $z_i(t)$ e chiamato c^i il vettore colonna contenente i relativi coefficienti arbitrari, si ha che è $z_i(t) = K_i(t)c^i$. Si ottiene allora che la soluzione generale del sistema (12) può essere scritta nella forma

$$z(t) = \begin{bmatrix} K_1(t) & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & K_2(t) & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & K_r(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^r \end{bmatrix},$$

dove $K_i(t)$ e c^i si riferiscono all'i-esimo blocco elementare J_i, di ordine q_i e relativo all'autovalore λ_i, essendo $q_1 + q_2 + ... + q_r = n$.

Ritorniamo ora alla matrice esponenziale e^{At}, allorché $A = SJS^{-1}$. Supponiamo che ogni blocco di Jordan abbia dimensione q_i, con $i = 1, ..., r$. Di conseguenza $q_1 + q_2 + ... + q_r = n$. Se $A = SJS^{-1}$, dalla definizione di e^{At} segue

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(SJS^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} SJ^kS^{-1} = S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}J^k\right)S^{-1} = Se^{Jt}S^{-1},$$

poiché risulta

$$(SJS^{-1})^k = (SJS^{-1})(SJS^{-1})...(SJS^{-1}) = SJ^kS^{-1}.$$

Il calcolo di e^{At} può quindi essere ridotto al calcolo di e^{Jt} e poiché

$$J^k = diag(J_1^k, ..., J_r^k),$$

ne segue che

$$e^{Jt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}J^k = diag(e^{J_1 t}, ..., e^{J_r t}).$$

Il generico blocco di Jordan J_i, di dimensione q_i, ha la forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

e si decompone come

$$J_i = \lambda_i I + N_i,$$

dove I ha dimensione q_i e

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Si vede facilmente che è

$$\lambda_i I N_i = N_i \lambda_i I$$

per cui, ricordando le proprietà delle matrici esponenziali relative a matrici che commutano, si ha

$$e^{tJ_i} = e^{t\lambda_i I} \cdot e^{tN_i} = e^{\lambda_i t} \cdot e^{tN_i}.$$

Per quanto riguarda N_i va osservato che

$$N_i^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, ..., \ N_i^{q_i-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ N_i^{q_i} = [0].$$

Ossia N_i è matrice *nilpotente di indice* q_i. Pertanto

$$e^{tN_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k N_i^k = \sum_{k=0}^{q_i-1} \frac{1}{k!} t^k N_i^k =$$

$$= I + tN_i + \frac{1}{2} t^2 N_i^2 + ... + \frac{1}{(q_i-1)!} t^{q_i-1} N_i^{q_i-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{1}{(q_1-2)!} t^{q_i-2} & \frac{1}{(q_1-1)!} t^{q_i-1} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(q_1-3)!} t^{q_i-3} & \frac{1}{(q_1-2)!} t^{q_i-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene quindi

$$e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t} \cdot e^{tN_i} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{q_i-1}}{(q_i-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{q_i-2}}{(q_i-2)!} e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}.$$

Esempio 14. Sia

$$J=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = diag\,(J_1, J_2.J_3)\,,$$

ove

$$J_1=[3]\,,\quad J_2=J_3=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poiché

$$e^{tJ_2}=e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

abbiamo

$$e^{tJ}=\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Supponiamo che le colonne della matrice di passaggio S che “jordanizza” A siano date dai vettori (autovettori, autovettori generalizzati, catene di autovettori generalizzati) $h^1, ..., h^n$ (linearmente indipendenti). Tali vettori certamente esistono in base ai teoremi di Jordan. Se, ad esempio, il primo blocco di Jordan di J è

$$J_1=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

di dimensione q_1, la relazione $AS = SJ$ implica

$$Ah^1=\lambda_1 h^1, \quad Ah^2=h^1+\lambda_1 h^2, ..., Ah^{q_1}=h^{q_1-1}+\lambda_1 h^{q_1}.$$

Per fissare le idee, denotiamo perciò con $h^1, ..., h^{q_1}$ una catena di autovettori generalizzati corrispondenti all'autovalore λ_1; $h^{q_1+1}, ..., h^{q_1+q_2}$ è una catena di autovettori generalizzati corrispondenti all'autovalore λ_2, e così via. In base alle considerazioni precedentemente svolte, l'integrale generale di

$$x'(t) = Ax(t)$$

si scrive come

$$x(t) = Se^{tJ}k,$$

avendo posto $k = S^{-1}c$, dove c è un vettore di costanti arbitrarie. Sviluppando tale relazione, si vede che un sistema fondamentale di soluzioni del sistema lineare $x'(t) = Ax(t)$ è dato da

$$x^1(t) = e^{\lambda_1 t}h^1, \quad x^2(t) = e^{\lambda_1 t}(th^1 + h^2), ..., x^{q_1}(t) = e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t^{q_1-1}}{(q_1-1)!}h^1 + ... + h^{q_1}\right);$$

$$x^{q_1+1}(t) = e^{\lambda_2 t}h^{q_1+1}, ..., x^{q_1+q_2} = e^{\lambda_2 t}\left(\frac{t^{q_2-1}}{(q_2-1)!}h^{q_1+1} + ... + h^{q_1+q_2}\right);$$

similmente per $\lambda_3, ..., \lambda_n$.

Di conseguenza la soluzione generale è data da

$$x(t) = k_1 x^1(t) + k_2 x^2(t) + ... + k_n x^n(t),$$

ove $k_1, ..., k_n$ sono costanti arbitrarie e $x^i(t)$, $i = 1, ..., n$, è determinata dalla procedura sopra indicata.

Per una dimostrazione rigorosa il lettore può fare riferimento, ad esempio, a Coddington e Carlson (1997), a Pontriaguine (1975) e a Baciotti e Ricci (1991).

6. Soluzione Generale Tramite il "Teorema di Decomposizione Primaria"

Un altro approccio, strettamente collegato alla forma canonica di Jordan, atto ad ottenere una formula esplicita della soluzione generale del sistema (1), è quello che fa uso del cosiddetto "teorema di decomposizione primaria". E' un approccio seguito, ad esempio, da Brauer e Nohel (1989) e da Coddington e Carlson (1997).

Definizione 9. Sia V uno spazio vettoriale e siano $V_1, V_2, ..., V_s$ sottospazi di V. Si dice che V è la *somma diretta* dei sottospazi $V_1, V_2, ..., V_s$ se *ogni* vettore $v \in V$ si scrive in uno e un solo modo nella forma

$$v = v^1 + v^2 + ... + v^s$$

con $v^k \in V_k$ per ogni $k = 1, ..., s$. In tale caso si scrive

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_s.$$

Si può osservare (cfr., ad esempio, Schlesinger (2011)) che uno spazio vettoriale a dimensione finita V è somma diretta dei suoi sottospazi $V_1, V_2, ..., V_s$ *se e solo se* accostando basi di $V_1, V_2, ..., V_s$ si ottiene una base di V.

Per una esplicita dimostrazione dei risultati della presente sezione, si può consultare anche i lavori di Herstein e Winter (1961), Hoffman e Kunze (1961), Horn e Johnson (1987), oltre che i lavori precedentemente citati.

Teorema 10 (Teorema di decomposizione primaria per matrici quadrate). Sia A una matrice di ordine n con autovalori (distinti) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ di rispettive molteplicità algebriche

$m_1, m_2, ..., m_k$, essendo $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$. Per ogni λ_j (di molteplicità m_j) la dimensione del *sottospazio radicale* $\tilde{E}_{\lambda_j}$ è m_j (Teorema 6). Inoltre risulta

$$\mathbb{C}^n = \tilde{E}_{\lambda_1} \oplus \tilde{E}_{\lambda_2} \oplus ... \oplus \tilde{E}_{\lambda_k},$$

ossia ogni vettore $\xi \in \mathbb{C}^n$ può essere scritto in un'unica forma del tipo

$$\xi = \xi^1 + \xi^2 + ... + \xi^k,$$

con $\xi^i \in \tilde{E}_{\lambda_i}$, $i = 1, ..., k$.

Si può osservare che il precedente teorema vale sia per il caso di matrici ad elementi reali che ad elementi complessi.

Applichiamo ora, seguendo Brauer e Nohel (1989), tali risultati alla ricerca della soluzione generale del sistema

$$x'(t) = Ax(t)$$

con la condizione iniziale $x(0) = \xi$, $\xi \in \mathbb{C}^n$ (in particolare $\xi \in \mathbb{R}^n$). Sappiamo, da quanto precede, che è

$$x(t) = e^{tA}\xi$$

e ci prefiggiamo di calcolare e^{tA} esplicitamente, sfruttando il Teorema di Decomposizione Primaria. Calcoliamo quindi gli autovalori di A; siano $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ di molteplicità (algebrica) $m_1, m_2, ..., m_k$, rispettivamente. Applichiamo il teorema al vettore dei valori iniziali ξ e avremo

$$\xi = v^1 + v^2 + ... + v^k$$

ove v^j è autovettore (eventualmente generalizzato) del sottospazio radicale $\tilde{E}_{\lambda_j}$, $j = 1, ..., k$. Poiché $\tilde{E}_{\lambda_j}$ è generato dal sistema

$$(A - \lambda_j I)^{m_j} x = [0], \tag{13}$$

risulta che v^j deve essere soluzione dello stesso sistema. Ora è

$$e^{tA}\xi = \sum_{j=1}^{k} e^{tA} v^j$$

e possiamo quindi scrivere

$$e^{tA} v^j = \exp(\lambda_j t) \exp\left[(A - \lambda_j I)t\right] v^j =$$

$$= \exp(\lambda_j t) \left[I + t(A - \lambda_j I) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda_j I)^2 + ... + \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{m_j - 1} \right] v^j,$$

con $t \in (-\infty, +\infty)$, ove la serie tra parentesi quadre è finita, perché v^j è soluzione di (13). Quindi il termine $(A - \lambda_j I)^{m_j} v^j = [0]$ e i termini successivi sono dunque tutti nulli. Osserviamo che i vettori $w^j = (A - \lambda_j I)^p v^j$, per $p = 0, 1, ..., m_j - 1$, appartengono al sottospazio $\tilde{E}_{\lambda_j}$ perché

$$(A - \lambda_j I)^{m_j} w^j = (A - \lambda_j I)^{m_j} \left[(A - \lambda_j I)^p v^j \right] = (A - \lambda_j I)^{m_j + p} v^j = [0] .$$

Perciò il vettore $e^{tA} v^j$ resta in $\tilde{E}_{\lambda_j}$, per $t \in (-\infty, +\infty)$. Applicando tali relazioni alla soluzione $x(t) = e^{tA}\xi$ del sistema $x'(t) = Ax(t)$, abbiamo

$$x(t) = e^{tA}\xi = e^{tA} \sum_{j=1}^{k} v^j = \sum_{j=1}^{k} e^{tA} v^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \exp(\lambda_j t) \left[I + t(A - \lambda_j I) + ... + \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!} (A - \lambda_j I)^{m_j - 1} \right] v^j.$$

Quindi la soluzione $x(t)$, soddisfacente la condizione iniziale $x(0) = \xi$ è

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} \exp(\lambda_j t) \left[\sum_{i=0}^{m_j - 1} \frac{t^i}{i!} (A - \lambda_j I)^i \right] v^j,$$

$t \in (-\infty, +\infty)$, ove $v^j \in \ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$, $j = 1, ..., k$.

Anche il testo (piuttosto avanzato) di Parenti e Parmeggiani (2010) giunge a simile conclusione. Va poi notato che tale formula risolutiva generale è stata ottenuta da G. Trevisan (1961), ricorrendo alla cosiddetta "teoria delle caratteristiche di Weyr" (si veda Trevisan (1961) e Mac Duffee (1943)). La dimostrazione di Trevisan è molto elegante e contenuta. Notiamo infine che Pagani e Salsa (1995) e Salsa e Squellati (2006) forniscono la seguente formulazione che è una versione "compatta" della precedente formula e che non mette in evidenza il ruolo giocato dagli autovettori generalizzati.

La soluzione generale del sistema

$$x'(t) = Ax(t)$$

ove A possiede autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_k$ di molteplicità rispettiva $m_1, ..., m_k$, è della forma

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{m_j - 1} c^{ij} t^i e^{\lambda_j t},$$

ove i c^{ij} sono *opportuni* vettori (contenenti in totale n costanti arbitrarie). Anche Braun (1993) è poco esplicito, dal punto di vista delle dimostrazioni dei risultati e dal punto di vista bibliografico, sull'ottenimento della formula risolutiva del sistema in oggetto.

7. Il Metodo di Putzer

Richiamiamo qui brevemente il cosiddetto "metodo di Putzer" (si veda, ad esempio, Apostol (1969, 1978, 1997), Putzer (1966)) che è stato delineato anche nelle precedenti note didattiche di Giorgi e Zuccotti (2014).

Abbiamo visto nelle pagine precedenti che la decomposizione di Jordan $A = SJS^{-1}$ di una matrice A di ordine n, avente anche autovalori non regolari, permette di dare una descrizione analiticamente soddisfacente dell'esponenziale di A. E' però un fatto che, da un punto di vista numerico, il calcolo preventivo della matrice di transizione S e della sua inversa S^{-1} a partire da A, dà spesso luogo a risultati instabili. Esistono tuttavia algoritmi che non utilizzano la conoscenza a priori di una base di autovettori generalizzati di A. Uno di tali metodi iterativi è il *metodo di Putzer,* spesso sufficientemente efficiente e preciso. Tale metodo riconduce il calcolo delle soluzioni di $x'(t) = Ax(t)$ alla risoluzione di n equazioni algebriche del primo ordine, con la sola conoscenza degli autovalori di A. Per meglio capire la struttura logica del metodo di Putzer, è bene richiamare il fondamentale *Teorema di Cayley-Hamilton.*

Teorema 11 (Cayley-Hamilton). Ogni matrice quadrata A di ordine n verifica, in senso matriciale, la propria equazione caratteristica, ossia risulta

$$c_0A^n + c_1A^{n-1} + ... + c_{n-1}A + c_nI = [0]\,,$$

essendo $c_0, c_1, ..., c_n$ i coefficienti del polinomio caratteristico di A.

Di conseguenza, il teorema di Cayley-Hamilton mostra che la potenza n-esima di una qualsiasi matrice quadrata A di ordine n, può essere espressa come combinazione lineare delle potenze inferiori $I, A, A^2, ..., A^{n-1}$. Segue che ognuna delle potenze superiori $A^{n+1}, A^{n+2}, ...$, può esprimersi anch'essa come combinazione lineare di $I, A, A^2, ..., A^{n-1}$. Perciò, nella serie che definisce e^{tA}, ogni termine $t^kA^k/k!$, con $k \geqq n$, è una combinazione lineare di $t^kI, t^kA, t^kA^2, ..., t^kA^{n-1}$. Perciò possiamo aspettarci che e^{tA} si possa esprimere come polinomio in A del tipo

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k(t)A^k,$$

dove i coefficienti scalari $q_k(t)$ dipendono da t. Putzer sviluppò due metodi per esprimere e^{tA} come polinomio in A. Il teorema seguente descrive il più semplice di tali due metodi.

Teorema 12 (Putzer). Siano $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ gli autovalori di una matrice A di ordine n e definiamo i seguenti polinomi in A :

$$P_0(A) = I, \quad P_k(A) = \prod_{m=1}^{k}(A - \lambda_m I), \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Allora si ha

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t)P_k(A) \tag{14}$$

dove i coefficienti scalari $r_1(t), ..., r_n(t)$ sono determinati per ricorrenza dal sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{aligned} r_1'(t) &= \lambda_1 r_1(t), \quad r_1(0) = 1 \\ r_{k+1}'(t) &= \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t), \quad r_{k+1}(0) = 0, \ (k = 1, 2, ..., n-1). \end{aligned} \tag{15}$$

Osservazione 3.

L'espressione (14) non esprime e^{tA} direttamente mediante combinazione lineare di potenze di A, bensì come combinazione lineare dei polinomi

$$P_0(A), P_1(A), ..., P_{n-1}(A).$$

Tali polinomi si calcolano facilmente, una volta determinati gli autovalori di A. Anche i coefficienti scalari $r_1(t), ..., r_n(t)$ nelle (15) sono facili da calcolare perché il sistema di equazioni differenziali che li definisce è triangolare e le soluzioni possono essere determinate per ricorrenza, una dopo l'altra.

Il metodo di Putzer ha validità generale, tuttavia, come osservato da Apostol (1969), non sempre i metodi generali sono i migliori da usare in certi casi specifici. Per esempio, Apostol, nel lavoro appena citato, dimostra i seguenti risultati.

Teorema 13. Sia A una matrice di ordine n, con tutti i suoi autovalori uguali a λ (λ è quindi di molteplicità algebrica $m_A(\lambda) = n$). Allora risulta

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k.$$

Teorema 14. Sia A una matrice di ordine $n \geqq 3$, con due autovalori distinti λ e μ, ove λ ha molteplicità algebrica $n-1$ e μ è radice semplice ($m_A(\mu) = 1$) dell'equazione caratteristica. Allora risulta

$$\begin{aligned} e^{tA} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k + \\ + \left\{ \frac{e^{\mu t}}{(\mu - \lambda)^{n-1}} - \frac{e^{\lambda t}}{(\mu - \lambda)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (\mu - \lambda)^k \right\} (A - \lambda I)^{n-1}. \end{aligned}$$

Teorema 15. Se A, di ordine n, ha n autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, risulta

$$e^{tA} = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k} L_k(A),$$

ove

$$L_k(A) = \prod_{j=1, j \neq k}^{n} \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_k - \lambda_j}, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Tenendo conto dei risultati espressi nei Teoremi 13, 14 e 15 è possibile esplicitare il calcolo di e^{tA} *per matrici di ordine 3,* nelle varie situazioni possibili.

• CASO 1. Se A, di ordine 3, ha autovalore λ, di molteplicità algebrica 3 ($m_A(\lambda) = 3$), risulta

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\left\{I + t(A-\lambda I) + \frac{1}{2}t^2(A-\lambda I)^2\right\}.$$

• CASO 2. Se A, di ordine 3, ha autovalori distinti λ, μ, υ, risulta

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\frac{(A-\mu I)(A-\upsilon I)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\upsilon)} + e^{\mu t}\frac{(A-\lambda I)(A-\upsilon I)}{(\mu-\lambda)(\mu-\upsilon)} +$$

$$+ e^{\upsilon t}\frac{(A-\lambda I)(A-\mu I)}{(\upsilon-\lambda)(\upsilon-\mu)}.$$

• CASO 3. Se A, di ordine 3, ha autovalori λ di molteplicità algebrica 2 ($m_A(\lambda) = 2$) e μ di molteplicità algebrica 1 (quindi $\mu \neq \lambda$), allora

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\left\{I + t(A-\lambda I)\right\} + \frac{e^{\mu t} - e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^2}(A-\lambda I)^2 - \frac{te^{\lambda t}}{\mu-\lambda}(A-\lambda I)^2.$$

Riferimenti Bibliografici

S. ABEASIS (1990), *Algebra Lineare e Geometria*, Zanichelli, Bologna.

H. AMANN (1990), *Ordinary Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin.

T. M. APOSTOL (1969), *Some explicit formulas for the exponential matrix* e^{tA}, The Amer. Math. Monthly, 76, 289-292.

T. M. APOSTOL (1978), *Calcolo, volume terzo. Analisi 2*, Bollati Boringhieri, Torino.

T. M. APOSTOL (1997), *Linear Algebra: A First Course with Applications to Differential Equations*, Wiley-Interscience, New York.

V. I. ARNOLD (1979), *Equazioni Differenziali Ordinarie*, Edizioni MIR, Mosca.

A. BACIOTTI, F. RICCI (1991), *Lezioni di Analisi Matematica 2*, Levrotto e Bella, Torino.

R. BELLMAN (1960), *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York.

M. BERTOCCHI, S. STEFANI, G. ZAMBRUNO (1992), *Matematica per l'Economia e la Finanza*, McGraw-Hill Libri Italia Srl, Milano.

M. BISIACCO, S. BRAGHETTO (2011), *Teoria dei Sistemi Dinamici*, Progetto Leonardo, Esculapio, Bologna.

N. BOF (2011), *La Forma Canonica di Jordan*, Tesi discussa alla Facoltà di Ingegneria dell'Università di Padova, Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione.

F. BRAUER, J. A. NOHEL (1989), *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations. An Introduction*, Dover Publications, Inc., New York.

M. BRAUN (1993), *Differential Equations and Their Applications* (*Fourth Edition*), Springer Verlag, New York.

R. A. BRUALDI (1987), *The Jordan canonical form: an old proof*, The Amer. Math. Monthly, 94, 257-267.

M. L. CARTWRIGHT (1960), *Reduction of systems of linear differential equations to Jordan normal form*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 51, 147-160.

E. CASTAGNOLI, L. PECCATI (1990), *Matematica per l'Analisi Economica* (2 volumi), ETAS Libri, Milano.

S. CATER (1962), *An elementary development of the Jordan canonical form*, The Amer. Math. Monthly, 69, 391-393.

J. P. CECCONI, G. STAMPACCHIA (1983), *Analisi Matematica. Vol. 2: Funzioni di più Variabili*, Liguori, Napoli.

E. A. CODDINGTON, N. LEVINSON (1955), *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York.

E. A. CODDINGTON, R. CARLSON (1997), *Linear Ordinary Differential Equations,* SIAM, Philadelphia.

C. G. CULLEN (1990), *Matrices and Linear Transformations*, 2nd ed., Dover, New York.

E. DEDO', A. VARISCO (1991), *Algebra Lineare*, CLUP, Città Studi, Milano.

L. E. ELSGOLTS (1981) *Equazioni Differenziali e Calcolo delle Variazioni*, Editori Riuniti, Roma.

A. F. FILIPPOV (1971), *A short proof of the theorem on reduction of a matrix to Jordan form*, (in russo), Moscow Univ. Bull., 26, 18-19.

R. L. FINNEY, D. E. OSTBERG (1976), *Elementary Differential Equations with Linear Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass.

R. FIORENZA, D. GRECO (1999), *Lezioni di Analisi Matematica - Volume Secondo*, Liguori, Napoli.

R. FLETCHER, D. C. SORENSEN (1983), *An algorithmic derivation of the Jordan canonical form*, The Amer. Math. Monthly, 90, 12-16.

J. N. FRANKLIN (2000), *Matrix Theory*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York.

A. GALPERIN, Z. WAKSMAN (1980), *An elementary approach to Jordan Theory*, The Amer. Math. Monthly, 87, 728-732.

L. GATTO (1998), *Un'Introduzione Amichevole alla Forma Canonica di Jordan*, CLUT, Torino.

G. GIORGI (2017), *Matematica per l'Analisi Economica e Finanziaria*, Giappichelli Editore, Torino.

G. GIORGI, C. ZUCCOTTI (2014), *Considerazioni didattiche sui sistemi omogenei di equazioni differenziali lineari del 1° ordine a coefficienti costanti*, DEM Working Paper Series N. 70, Department of Economics and Management, Università di Pavia.

G. GILARDI (1996), *Analisi Due*, Seconda Edizione, McGraw-Hill Libri Italia, Milano.

A. GIUA, C. SEATZU (2009), *Analisi dei Sistemi Dinamici*, Springer, Milano.

I. GOHBERG, S. GOLDBERG (1996), *A simple proof of the Jordan decomposition theorem for matrices*, The Amer. Math. Monthly, 103, 157-159.

G. H. GOLUB, C. F. VAN LOAN (1996), *Matrix Computations*, 3rd ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore.

B. GUERRIEN (1997), *Algèbre Linéaire pour Economistes*, Economica, Paris.

I. N. HERSTEIN, D. J. WINTER (1961), *Matrix Theory and Linear Algebra*, Macmillan, New York.

M. HIRSCH, S. SMALE (1974), *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York.

K. HOFFMAN, R. KUNZE (1961), *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

L. HOGBEN (Ed.) (2014), *Handbook of Linear Algebra - Second Edition*, CRC Press, Boca Raton, Fl.

R. A. HORN, C. R. JOHNSON (1987), *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U. K.

R. HORN, C. JOHNSON (1994), *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

J. H. HUBBARD, B. H. WEST (1991-1995), *Differential Equations. A Dynamic Systems Approach, Parts I and II*, Springer Verlag, Berlin.

S. INVERNIZZI (1990), *Lezioni di Calcolo Differenziale*, LINT, Trieste.

A. JEFFREY (1990), *Linear Algebra and Ordinary Differential Equations*, Blackwell Scientific Publications, Oxford.

M. KOBEISSI, B. CHEBARO (2016), *Elementary proofs of the Jordan decomposition theorem for nilpotent matrices*, American Journal of Mathematics and Statistics, 6, 238-241.

S. LANG (1976), *Algèbre Linéaire* (2 volumi), InterEditions, Paris.

C. C. MAC DUFFEE (1943), *Vectors and Matrices*, The Mathematical Association of America, Carus Mathematical Monographs N. 7, Ithaca, New York.

C. MEYER (2000), *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia.

P. MICHEL (1988), *Cours de Mathématiques pour Economistes*, Economica, Paris.

Y. MURATA (1977), *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*, Academic Press, New York.

W. K. NICHOLSON (2002), *Algebra Lineare. Dalle Applicazioni alla Teoria*, McGraw-Hill, Milano.

B. NOBLE, J. W. DANIEL (1998), *Applied Linear Algebra*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

J. ORTEGA (1969), *Matrix Theory. A Second Course*, Plenum Press, New York.

C. D. PAGANI, S. SALSA (1995), *Analisi Matematics*, *Volume 1*, *Volume 2*, Masson. Milano.

C. PARENTI, A. PARMEGGIANI (2010), *Algebra Lineare ed Equazioni Differenziali Ordinarie*, Springer, Milano.

L. PERKO (1991), *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin.

L. PICCININI, G. STAMPACCHIA, G. VIDOSSICH (1978), *Equazioni Differenziali Ordinarie in* $\mathbb{R}^n$, Liguori Editore, Napoli.

L. PONTRIAGUINE (1975), *Equations Différentielles Ordinaires*, Editions MIR, Moscou.

E. J. PUTZER (1966), *Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients*, The Amer. Math. Monthly, 73, 2-7.

J. QUIRK, R. RUPPERT (1965), *Qualitative economics and the stability of equilibrium*, The Review of Economic Studies, 32, 311-326.

S. SALSA, A. SQUELLATI (2006), *Modelli Dinamici e Controllo Ottimo. Un'Introduzione Elementare*, EGEA, Milano.

G. SANSONE (1941), *Equazioni Differenziali nel Campo Reale*, *Parte I* e *Parte II*, Zanichelli, Bologna.

E. SCHLESINGER (2011), *Algebra Lineare e Geometria*, Zanichelli, Bologna.

C. P. SIMON, L. BLUME (1994), *Mathematics for Economists*, W. W. Norton and Company, New York.

G. STRANG (2006), *Linear Algebra and Its Applications*, *4th Edition*, Brooks/Cole, Cengage Learning.

G. TREVISAN (1961), *Un'espressione esplicita per l'integrale di un sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti. Applicazioni*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 31, 301-307.

H. VALIAHO (1986), *An elementary approach to Jordan form of a matrix*, The Amer. math. Monthly, 93, 711-714.

F. VERHULST (1989), *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin.

S. H. WEINTRAUB (2008), *Jordan Canonical Form: Application to Differential Equations*, Morgan & Chaypool Publishers.