ISSN: 2281-1346

Department of Economics and Management

DEM Working Paper Series

Considerazioni Didattiche sui Sistemi Omogenei di Equazioni Differenziali Lineari del 1° Ordine a Coefficienti Costanti

Giorgio Giorgi
(Università di Pavia)

Cesare Zuccotti
(Università di Pavia)

 # 70 (03-14)

Via San Felice, 5
I-27100 Pavia
http://epmq.unipv.eu/site/home.html

March 2014

Considerazioni Didattiche sui Sistemi Omogenei di Equazioni Differenziali Lineari del 1° Ordine a Coefficienti Costanti

G. Giorgi[1] e C. Zuccotti[2]

La presente nota, di intenti prevalentemente didattici, prende lo spunto dal corso di Economia Matematica[1] tenuto dal primo degli autori presso il Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali dell'Università di Pavia.

Ci proponiamo, infatti, di appianare alcune difficoltà relative alla ricerca delle soluzioni reali del sistema omogeneo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$, di equazioni differenziali, allorchè la matrice $\mathbf{A}$ (reale e quadrata) ammette autovalori complessi (coniugati) e, quindi, anche autovettori complessi (coniugati).

Cerchiamo, inoltre, di fornire una giustificazione dei procedimenti risolutivi nel caso la matrice $\mathbf{A}$ sia non diagonalizzabile (a causa di autovalori multipli non regolari). Tale caso, infatti, porta a complicazioni formali, di solito trattate solo nei testi espressamente dedicati alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

Nell'Introduzione richiamiamo alcuni concetti fondamentali relativi ai sistemi di equazioni differenziali lineari del 1° ordine.

Nel secondo paragrafo analizziamo il problema della ricerca della soluzione generale del sistema omogeneo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$.

Nel terzo paragrafo esaminiamo le condizioni di stabilità della soluzione nulla del suddetto sistema.

Nel quarto paragrafo raccogliamo gli esempi di supporto alla trattazione degli argomenti considerati nei precedenti paragrafi.

[1] Facoltà di Economia, Via S. Felice, 5 - 27100 Pavia, (Italia). E-mail: ggiorgi@eco.unipv.it

[2] Facoltà di Economia, Via S. Felice, 5 - 27100 Pavia, (Italia). E-mail: czuccotti@eco.unipv.it

[1] Tale corso, negli anni passati, ha avuto la denominazione, più appropriata, di "Matematica per l'Economia e la Finanza".

1. Introduzione

Come noto, un sistema dinamico del tipo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$, con $\mathbf{x}'(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, è *lineare* se il suo secondo membro è funzione lineare (affine) delle variabili di stato, ossia se

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \tag{1}$$

ove $\mathbf{A}(t)$ è una matrice reale, quadrata, di ordine n, detta *matrice dei coefficienti*, e $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ è il cosiddetto *vettore dei termini noti* o anche *termine forzante.*
Se si ha $\mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$ il sistema è detto *omogeneo.*

Nell'ipotesi ogni elemento $a_{ij}(t)$ di $\mathbf{A}(t)$, e ogni elemento $b_i(t)$ di $\mathbf{b}(t)$, sia funzione continua nella variabile temporale t, in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, vale il seguente teorema di esistenza e unicità "in grande[2]" per un problema di Cauchy.

Teorema 1

Se la matrice $\mathbf{A}(t)$ e il vettore $\mathbf{b}(t)$ sono continui in $I \subset \mathbb{R}$, allora esiste, in I, un'unica soluzione del sistema (1) che verifica la condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, $t_0 \in I$.

Risulta infatti in questo caso $\nabla_x \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{A}(t)$ e, quindi, $\mathbf{f}$ soddisfa le condizioni del teorema di esistenza e unicità "in grande". Si veda, ad esempio, M. Bertocchi, S. Stefani, G. Zambruno, Matematica per l'Economia e la Finanza, McGraw-Hill libri Italia, Milano, 1992.

Possiamo osservare che quanto su indicato non significa affatto che esiste una "formula generale" che fornisce le soluzioni del sistema (1); è nota, infatti, una formula "risolutiva" solo nel caso sia $n = 1$.

In generale, la procedura della ricerca della soluzione del sistema (1) è precisata dai teoremi che seguono.

Teorema 2 (Principio di sovrapposizione)

La soluzione generale (o integrale generale) del sistema (1) si ottiene dalla somma dei seguenti addendi:

i) una qualsiasi soluzione particolare del sistema (ossia una soluzione di un qualsiasi problema di Cauchy, del tipo $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, $t_0 \in I$);

ii) la soluzione generale del sistema *omogeneo* associato al sistema (1), ossia del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t)$.

Si può osservare che tale teorema, nonostante l'apparente genericità, costituisce un presupposto di notevole efficacia per la determinazione della soluzione del sistema (1).

Richiamiamo che il concetto di dipendenza e indipendenza lineare può essere esteso a elementi di uno spazio lineare S qualsiasi. Ad esempio, le funzioni (vettoriali) $\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t)$ sono *linearmente dipendenti* su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, se esistono n moltiplicatori $c_i \in \mathbb{R}$, *non tutti nulli*, tali che, con $\mathbf{0}$ vettore nullo, si abbia

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}^i(t) = \mathbf{0}$$

[2] Se l'intervallo I è assegnato, si parla di "problema di Cauchy in grande" mentre, se l'intervallo I è determinato assieme alla soluzione, si parla di "problema di Cauchy in piccolo".

su I. In caso contrario le funzioni date sono *linearmente indipendenti* su I.

Ciò premesso, vale il fondamentale teorema seguente.

Teorema 3

Considerata la matrice $\mathbf{A}(t)$, di ordine n, continua su $I \subset \mathbb{R}$, l'insieme S delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \tag{2}$$

è uno spazio lineare di dimensione n.

Una importante conseguenza di tale teorema consiste nel fatto che, se conosciamo n soluzioni $\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t)$,..., $\mathbf{x}^n(t)$, linearmente indipendenti (che sempre esistono) del sistema (2), la *soluzione generale*, o *integrale generale*, del sistema (2) è la seguente

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}^i(t), \quad \text{con } c_i \in \mathbb{R}, \text{ costanti arbitrarie.}$$

Le soluzioni $\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t)$,..., $\mathbf{x}^n(t)$, qualora siano linearmente indipendenti, costituiscono un cosiddetto *sistema fondamentale di soluzioni.*

Per appurare se tali n soluzioni sono linearmente indipendenti si forma con esse una matrice $\mathbf{W}(t)$, quadrata, di ordine n, definita come segue:

$$\mathbf{W}(t) = \left[\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), ..., \mathbf{x}^n(t)\right],$$

detta "matrice Wronskiana" (dal nome del matematico polacco J. M. Wronski), e se ne calcola il determinante $|\mathbf{W}(t)|$.

Se e solo se si ha $|\mathbf{W}(t_0)| \neq 0$, per un valore $t_0 \in I$ (e allora risulta $|\mathbf{W}(t)| \neq 0$, $\forall t \in I$), le n soluzioni del sistema (2), $\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t)$,..., $\mathbf{x}^n(t)$, sono linearmente indipendenti (ossia formano un sistema fondamentale di soluzioni).

Per contro, se e solo se si ha $|\mathbf{W}(t_0)| = 0$, per un valore $t_0 \in I$ (e allora risulta $|\mathbf{W}(t)| \equiv 0$, $\forall t \in I$), le n soluzioni del sistema (2), $\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t)$,..., $\mathbf{x}^n(t)$ sono linearmente dipendenti.

Si può osservare che quanto indicato in riferimento alle funzioni vettoriali $\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t)$,..., $\mathbf{x}^n(t)$, soluzioni del sistema (2), non vale per funzioni vettoriali qualsiasi.

In generale, infatti, date n funzioni vettoriali $\mathbf{g}^1(t), \mathbf{g}^2(t)$,..., $\mathbf{g}^n(t)$, vale la seguente implicazione:

$$|\mathbf{W}(t)| = \det\left[\mathbf{g}^1(t), \mathbf{g}^2(t), ..., \mathbf{g}^n(t)\right] \neq 0 \text{ in } I \Longrightarrow \mathbf{g}^1(t), \mathbf{g}^2(t), ..., \mathbf{g}^n(t) \text{ sono l.i. in } I,$$

ma non vale l'implicazione inversa, come mostra il seguente controesempio, dovuto a Peano.

Sia $\quad \mathbf{g}^1(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g}^2(t) = \begin{bmatrix} t\,|t| \\ 2\,|t| \end{bmatrix}; \quad t \in I = [a, b] = [-1, 1].$

Abbiamo $\quad \mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t\,|t| \\ 2t & 2\,|t| \end{bmatrix}$ ed è $|\mathbf{W}(t)| \equiv 0, \quad \forall t \in [-1, 1].$

Tuttavia $\mathbf{g}^1(t)$ e $\mathbf{g}^2(t)$ sono linearmente indipendenti in $[-1,1]$. Infatti

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} t\,|t| \\ 2\,|t| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

implica $\alpha_1 = -\alpha_2$, per $t > 0$, e $\alpha_1 = \alpha_2$, per $t < 0$. Si deduce quindi che deve essere, in $[-1,1]$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ da cui l'asserita indipendenza lineare in I di $\mathbf{g}^1(t)$ e $\mathbf{g}^2(t)$.

2. Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti

Nel caso la matrice $\mathbf{A}(t)$ del sistema (1) non dipenda da t, ossia la matrice sia a elementi costanti, si ha il seguente sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t). \tag{3}$$

Il problema della ricerca delle soluzioni di tale sistema, naturalmente, presenta un livello di difficoltà minore rispetto al sistema (1), pur essendo anch'esso di notevole interesse applicativo e concettuale.

Per il sistema (3), si può osservare che valgono sia il Teorema 1 di esistenza e unicità "in grande" per un problema di Cauchy, e sia il Teorema 2, ovvero il principio di sovrapposizione. Per tale motivo nella presente Nota ci occuperemo dei sistemi dinamici omogenei del tipo

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t), \tag{4}$$

con $\mathbf{A}$ matrice, reale, quadrata, di ordine n.

In relazione al sistema (4) si può osservare che il vettore nullo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ ne è soluzione (si ha infatti $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{0}$, $\forall t \in I$, e quindi $\mathbf{0} = \mathbf{0}$) e valgono le proprietà viste per i sistemi (1) e (2), ossia quanto segue.

L'insieme S delle soluzioni del sistema (4) è uno spazio lineare di dimensione n; riusciremo quindi a determinarne *tutte* le soluzioni, ossia la soluzione generale se riusciremo a determinare n soluzioni linearmente indipendenti del sistema (4). L'insieme S di tutte le soluzioni non è che l'insieme delle combinazioni lineari di tali soluzioni linearmente indipendenti.

Occupiamoci ora della ricerca della soluzione generale del sistema (4). Come noto, nel caso sia $n = 1$, ossia quando abbiamo l'equazione

$$x'(t) = a\,x(t), \quad x', x, a \in \mathbb{R},$$

la sua soluzione generale è data da

$$x(t) = c\,e^{at}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

La struttura di tale soluzione suggerisce che anche la soluzione del sistema (4) abbia una struttura simile. Infatti, con $\mathbf{v}$ vettore opportuno, non nullo, di $\mathbb{R}^n$ o di $\mathbb{C}^n$, e λ scalare opportuno, di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{C}$, il vettore $\mathbf{x}(t)$ seguente

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}\,e^{\lambda t},$$

e la sua derivata prima

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda\,\mathbf{v}\,e^{\lambda t},$$

sostituiti nella (4),

$$\lambda\,\mathbf{v}\,e^{\lambda t} = \mathbf{A}\,\mathbf{v}\,e^{\lambda t}$$

danno

$$\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}.$$

Osservando tale uguaglianza si deduce che i numeri λ e i vettori $\mathbf{v}$ altro non sono che gli autovalori, e i corrispondenti autovettori, della matrice $\mathbf{A}$. Possiamo quindi enunciare il seguente teorema.

Teorema 4

Sia dato il sistema (4), se $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}\,e^{\lambda t}$ è la sua soluzione, allora λ è autovalore di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{v}$ ne è il corrispondente autovettore. Viceversa, se λ è autovalore di $\mathbf{A}$, allora la funzione

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}\,e^{\lambda t},$$

con $\mathbf{v}$ autovettore associato a λ, è soluzione del sistema (4).

Sulla base di tale fondamentale teorema, cercheremo *tutte* le soluzioni del sistema (4) sia nel caso la matrice $\mathbf{A}$ possegga n autovettori linearmente indipendenti sia nel caso non li possegga, ovvero la matrice $\mathbf{A}$ sia *diagonalizzabile* oppure non lo sia.

2.1 La matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile

Come noto, se l'equazione caratteristica $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ della matrice $\mathbf{A}$ ammette *radici semplici* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ allora $\mathbf{A}$ è senz'altro diagonalizzabile, mentre, se tale equazione presenta radici multiple, $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile se e solo se la relativa molteplicità algebrica[3] coincide con la relativa molteplicità geometrica.

Se la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, e quindi possiede n autovettori $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2,..., \mathbf{v}^n$, linearmente indipendenti, risulta che anche le funzioni

$$\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{v}^1\,e^{\lambda_1 t}, \quad \mathbf{x}^2(t) = \mathbf{v}^2\,e^{\lambda_2 t}, \quad ...,, \quad \mathbf{x}^n(t) = \mathbf{v}^n\,e^{\lambda_n t}$$

sono linearmente indipendenti, ossia formano un sistema fondamentale di soluzioni. Il relativo determinante della matrice Wronskiana, infatti, è dato da

$$|W(t)| = \det\left[\mathbf{v}^1\,e^{\lambda_1 t},\ \mathbf{v}^2\,e^{\lambda_2 t},\ ...,\ \mathbf{v}^n\,e^{\lambda_n t}\right] = e^{(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n)t}\det\left[\mathbf{v}^1,\ \mathbf{v}^2,\ ...,\ \mathbf{v}^n\right].$$

Il determinante $|W(t)|$ è quindi senz'altro non nullo, poichè $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$, ..., $\mathbf{v}^n$ sono per ipotesi linearmente indipendenti.

[3] Con λ_i un autovalore della matrice $\mathbf{A}$, la molteplicità algebrica $m_A(\lambda_i)$ è la molteplicità di λ_i come radice del polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$, mentre la molteplicità geometrica $m_G(\lambda_i)$ è la dimensione dell'autospazio V_{λ_i} associato a λ e si ha $m_G(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i} = n - \text{rango}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$, con $1 \leq m_G(\lambda_i) \leq m_A(\lambda_i)$, $\sum_{i=1}^{m} m_A(\lambda_i) = n$, $\sum_{i=1}^{m} m_G(\lambda_i) \leq n$.

Si è così trovato un sistema fondamentale di soluzioni del sistema (4), con matrice $\mathbf{A}$ diagonalizzabile, e la *soluzione generale* è la seguente

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}^1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}^2\, e^{\lambda_2 t} + ... + c_n\mathbf{v}^n\, e^{\lambda_n t}, \tag{5}$$

con $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$, costanti *arbitrarie.*

Tale soluzione generale può anche essere ottenuta con un procedimento in termini matriciali nel seguente modo.

Come noto, nel caso in esame esiste una matrice non singolare $\mathbf{P}$ tale che

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}$$

essendo $\mathbf{D}$ una matrice diagonale avente gli autovalori di $\mathbf{A}$ sulla diagonale principale. Premoltiplichiamo ambo i membri del sistema (4) per $\mathbf{P}^{-1}$:

$$\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}(t),$$

da cui, essendo $\mathbf{P}\,\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$, si ottiene

$$\left(\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{x}(t)\right)' = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{x}(t),$$

e quindi

$$\left(\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{x}(t)\right)' = \mathbf{D}\left(\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{x}(t)\right).$$

Posto $\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{x}(t)$, si ha

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{D}\,\mathbf{z}(t)$$

ossia,

$$\begin{cases} z_1'(t) = \lambda_1\, z_1(t) \\ z_2'(t) = \lambda_2\, z_2(t) \\ \quad ... \qquad\quad ... \\ z_n'(t) = \lambda_n\, z_n(t)\ . \end{cases}$$

La soluzione generale della i-esima equazione differenziale $z_i'(t) = \lambda_i\, z_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, è

$$z_i(t) = c_i\, e^{\lambda_i\, t}, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

con $c_i \in \mathbb{R}$, costanti arbitrarie, e, quindi, vale quanto segue:

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t). \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\, e^{\lambda_1\, t} \\ c_2\, e^{\lambda_2\, t} \\ \vdots \\ c_n\, e^{\lambda_n\, t} \end{bmatrix}.$$

Per ottenere la soluzione generale del sistema (4), utilizziamo ora la trasformazione inversa

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\,\mathbf{z}(t)$$

e, ricordando che la matrice $\mathbf{P}$ ha per colonne gli n autovettori (l.i.) $\mathbf{v}^i$, associati agli autovalori λ_i di $\mathbf{A}$, $i = 1, 2, ..., n$, si ottiene la soluzione generale

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\left[\mathbf{v}^1;\ \mathbf{v}^2;\ ...,\ \mathbf{v}^n\right]}_{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} c_1\, e^{\lambda_1\, t} \\ c_2\, e^{\lambda_2\, t} \\ \vdots \\ c_n\, e^{\lambda_n\, t} \end{bmatrix} = c_1\, \mathbf{v}^1\, e^{\lambda_1\, t} + c_2\, \mathbf{v}^2\, e^{\lambda_2\, t} + ... + c_n\, \mathbf{v}^n\, e^{\lambda_n\, t}$$

che coincide con la (5).

Si può osservare quanto segue.

Se si assume $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, si ottiene la soluzione nulla $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ (che sempre esiste, come già indicato; d'altronde l'insieme S di tutte le soluzioni è uno spazio lineare).

Se $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sono radici *reali* dell'equazione caratteristica della matrice $\mathbf{A}$, anche la soluzione generale (5) sarà reale, ovviamente, con le costanti arbitrarie c_i reali.

Se alcuni autovalori sono radici *complesse* (coniugate) la soluzione generale $\mathbf{x}(t)$ del sistema (4) è complessa ma possiamo sempre trasformarla in una soluzione reale come nel seguito indicato.

Considerata la matrice $\mathbf{A}$ diagonalizzabile e assunto, per semplicità, che esista una sola coppia di autovalori complessi coniugati, $\lambda = a + ib$, $\overline{\lambda} = a - ib$, i cui rispettivi autovettori (complessi coniugati) siano $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$; $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{u} - i\mathbf{w}$ ($\mathbf{u}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$), la soluzione generale (5) potrà essere scritta come segue

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}^1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}^2\, e^{\lambda_2 t} + ... + \mathbf{v}e^{(a+ib)t} + \overline{\mathbf{v}}e^{(a-ib)t} + ... + c_n\mathbf{v}^n\, e^{\lambda_n t},$$

(possiamo pensare le costanti arbitrarie "incorporate" negli autovettori $\mathbf{v}$ e $\overline{\mathbf{v}}$). Il "contributo" di tale coppia di autovettori alla soluzione generale è allora dato da

$$(\mathbf{u} + i\mathbf{w})\, e^{(a+ib)t} + (\mathbf{u} - i\mathbf{w})\, e^{(a-ib)t}$$

e può essere trasformato con le seguenti operazioni:

eseguiamo le moltiplicazioni e fattorizziamo:

$$\mathbf{u}\, e^{at+ibt} + i\mathbf{w}\, e^{at+ibt} + \mathbf{u}\, e^{at-ibt} - i\mathbf{w}\, e^{at-ibt} = \mathbf{u}\left(e^{at+ibt} + e^{at-ibt}\right) + i\mathbf{w}\left(e^{at+ibt} - e^{at-ibt}\right) =$$
$$= e^{at}\left[\mathbf{u}\left(e^{+ibt} + e^{-ibt}\right) + i\mathbf{w}\left(e^{+ibt} - e^{-ibt}\right)\right] \;;$$

moltiplichiamo e dividiamo il primo addendo per 2 e il secondo addendo per $2i$:

$$e^{at}\left[2\mathbf{u}\, e^{at}\frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2} + 2i^2\mathbf{w}\,\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i}\right] \;;$$

facciamo ora riferimento alle "formule[4] di Eulero" e alla definizione dell'unità immaginaria i ($i^2 = -1$) :

$$e^{at}\left[2\mathbf{u}\,\frac{e^{ibt}+e^{-ibt}}{2} - 2\mathbf{w}\,\frac{e^{ibt}-e^{-ibt}}{2i}\right] = e^{at}\,(2\mathbf{u}\,\cos bt - 2\mathbf{w}\,\sin bt)\,;$$

[4] Formule di Eulero per il coseno e il seno: $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$; $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2}$.

otteniamo, infine,

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}^1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}^2\, e^{\lambda_2 t} + ... + e^{at}\left(\mathbf{k}^1\, \cos bt + \mathbf{k}^2\, \sin bt\right) + ... + c_n\mathbf{v}^n\, e^{\lambda_n t}, \qquad (6)$$

con $\mathbf{k}^1 = 2\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{k}^2 = -2\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, ossia una espressione *reale*.

Dal punto di vista prettamente risolutivo del sistema (4), individuata la coppia di autovalori complessi coniugati $a \pm ib$, si utilizza la formula (6), con $\mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2 \in \mathbb{R}^n$ da determinare, come svolto nell'esempio 1, in modo che il sistema inizialmente assegnato sia soddisfatto.

2.2 La matrice A non è diagonalizzabile

Nel caso l'equazione caratteristica $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ della matrice $\mathbf{A}$ ammetta almeno una radice multipla λ_i *non regolare*, ossia risulti che la molteplicità geometrica di λ_i è minore della rispettiva molteplicità algebrica, $m_G(\lambda_i) < m_A(\lambda_i)$, la matrice $\mathbf{A}$ non è diagonalizzabile. In tal caso, la matrice $\mathbf{A}$ non possiede autovettori linearmente indipendenti e, quindi, si ha il problema di determinare n soluzioni indipendenti del sistema (4), al fine di ottenere un "sistema fondamentale di soluzioni" e, successivamente, l'integrale generale del sistema.

Vediamo in modo graduale come si può arrivare alla determinazione di un sistema fondamentale di soluzioni.

Se λ_1 è radice reale, di molteplicità 2, e *non è regolare*, la procedura vista in 2.1 non è più valida. Si dimostra che nella soluzione generale (5), in luogo degli addendi

$$c_1\,\mathbf{v}^1\, e^{\lambda_1\, t} + c_2\,\mathbf{v}^2\, e^{\lambda_1\, t},$$

compare un addendo del tipo

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}t)e^{\lambda_1\, t},$$

con $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ da determinare opportunamente e la soluzione sarà

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}t)e^{\lambda_1\, t} + c_3\mathbf{v}^3\, e^{\lambda_3 t} + ... + c_n\mathbf{v}^n\, e^{\lambda_n t}.$$

Se λ_1 è radice reale, di molteplicità 3, e non è regolare, nella (5) in luogo dei primi tre addendi si ha un addendo del tipo

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}t^2)e^{\lambda_1\, t}$$

e, genericamente, se λ_1 è radice reale, di molteplicità r, e non è regolare, si ha un addendo del tipo

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}t^2 + ... + \mathbf{k}t^{r-1})e^{\lambda_1\, t},$$

con $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}, \mathbf{c}, ..., \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ da determinare opportunamente, ottenendo così un "sistema fondamentale di soluzioni".

Giustifichiamo, almeno parzialmente, quanto su indicato richiamando anzitutto che una qualsiasi matrice (reale) quadrata $\mathbf{A}$ è simile a una matrice triangolare (inferiore o superiore) come precisato dal fondamentale teorema che segue.

Teorema 5 (di Schur)

Considerata una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, con $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ gli autovalori, non necessariamente regolari, esiste una matrice $\mathbf{S}$, di ordine n, non singolare, tale che

$$\mathbf{SAS}^{-1} = \mathbf{T},$$

con $\mathbf{T}$ matrice triangolare (inferiore o superiore).

Tale teorema consente di trasformare il sistema (4) come segue.
Da $\mathbf{T} = \mathbf{SAS}^{-1}$ otteniamo $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{TS}$, essendo, ad esempio, $\mathbf{T}$ triangolare inferiore e avendo quindi sulla diagonale principale gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$. Il sistema (4) assume perciò la seguente forma

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{TS}\,\mathbf{x}(t)$$

ossia

$$\mathbf{Sx}'(t) = \mathbf{TS}\,\mathbf{x}(t).$$

Posto ora $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}\,\mathbf{x}(t)$ si ha

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{T}\,\mathbf{y}(t).$$

Abbiamo, in questo modo, "triangolarizzato" il sistema (4), in quanto la matrice $\mathbf{T}$ ha la forma

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ t_{21} & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ t_{31} & t_{32} & \lambda_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & ... & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Possiamo supporre ora, per semplicità, che gli autovalori siano tutti reali in quanto, come visto, l'esistenza di autovalori complessi non è una limitazione per la ricerca di soluzioni reali. Ordiniamo sulla diagonale principale gli autovalori ripetuti in base alla loro molteplicità algebrica e scriviamo esplicitamente il sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{T}\,\mathbf{y}(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1'(t) & = & \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) & = & t_{21}y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) \\ y_3'(t) & = & t_{31}y_1(t) + t_{32}y_2(t) + \lambda_3 y_3(t) \\ ... & = & ... \\ y_n'(t) & = & t_{n1}y_1(t) + t_{n2}y_2(t) + t_{n3}y_3(t) + ... + \lambda_n y_n(t) \ . \end{array} \right. \tag{7}$$

I pregi fondamentali della "triangolarizzazione" così ottenuta consistono nel fatto che il sistema (7) può essere risolto "per ricorrenza", cominciando ovviamente dalla prima equazione: noto $y_1(t)$ si sostituisce nella seconda equazione e si ricava $y_2(t)$, e così via, come nel seguito indicato.

(a) La prima equazione $y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t)$ ha come integrale generale

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \text{con } c_1 \text{ costante arbitraria.}$$

(b) Con riferimento alla seconda equazione, distinguiamo tre casi a seconda che si abbia $\lambda_2 \neq \lambda_1$ oppure $\lambda_2 = \lambda_1$, oppure $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

$(b1)$ Sia $\lambda_2 \neq \lambda_1$; in tal caso λ_1 è radice semplice in base all'ordinamento su precisato.

Sostituendo $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ nella seconda equazione si ottiene la seguente equazione lineare del primo ordine

$$y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) + t_{21}\, c_1 e^{\lambda_1 t}$$

la cui soluzione[5] è

$$y_2(t) = e^{\int \lambda_2 dt} \left\{ c_2 + \int t_{21}\, c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot e^{-\int \lambda_2 dt} dt \right\}$$

e può essere riscritta come segue

$$\begin{aligned} y_2(t) &= c_2 e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_2 t} \cdot t_{21}\, c_1 \int e^{\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} dt = c_2 e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_2 t} \cdot t_{21}\, c_1 \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t} dt = \\ &= c_2 e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_2 t} \frac{t_{21}\, c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t} = c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{t_{21}\, c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t}, \end{aligned}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Occorre poi sostituire le soluzioni così trovate nella 3^a equazione, e così via.

$(b2)$ Sia $\lambda_2 = \lambda_1$. Procedendo come su indicato si ottiene

$$y_2(t) = e^{\int \lambda_1 dt} \left\{ c_2 + \int t_{21}\, c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot e^{-\int \lambda_1 t dt} dt \right\},$$

ossia

$$\begin{aligned} y_2(t) &= e^{\lambda_1 t} \left\{ c_2 + t_{21}\, c_1 \int e^{\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_1 t} dt \right\} = e^{\lambda_1 t} \left\{ c_2 + t_{21}\, c_1 \int e^0 dt \right\} = \\ &= e^{\lambda_1 t} \left\{ c_2 + t_{21}\, c_1\, t \right\} = (c_2 + t_{21}\, c_1\, t)\, e^{\lambda_1 t} = (k_1 + k_2\, t) e^{\lambda_1 t}, \end{aligned}$$

essendo $k_1 = c_2$ e $k_2 = c_1\, t_{21}$

Si può osservare, quindi che se λ_1 è radice doppia, non solo $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ è soluzione ma lo è anche $y_2(t) = (c_1 t_{21}\, t + c_2)\, e^{\lambda_1 t}$.

Nel caso, ad esempio, il sistema (7) sia di ordine 2, con $\lambda_2 = \lambda_1$, consideriamo il vettore

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix},$$

con $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t) = (t_{21} c_1 t + c_2)\, e^{\lambda_1 t}$, ossia il vettore

$$e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} c_1 \\ \\ t_{21} c_1 t + c_2 \end{bmatrix},$$

ove ciò che compare tra parentesi quadrate rappresenta il seguente vettore di polinomi di 1° grado in t :

$$y(t) = e^{\lambda_1 t} \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ t_{21} c_1 \end{bmatrix} \right\}.$$

[5] Come comunemente utilizzato, il simbolo di integrale individua, nel caso in esame, una data primitiva della funzione integranda.

Tale polinomio vettoriale non è del tutto arbitrario: su 4 elementi solo c_1 e c_2 sono arbitrari.

$(b3)$ Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, in modo analogo a quanto su indicato, si ottiene la seguente soluzione $y_3(t) = (k_1 t_{32}\, t^2 + k_2 t_{31}\, t + k_3)\, e^{\lambda_1 t}$, ossia un opportuno polinomio di 2° grado.

Procedendo come si è visto, ci si rende conto che se qualche autovalore della matrice $\mathbf{A}$ è multiplo, regolare o anche non regolare, la soluzione del sistema (7) è data dall'espressione

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{s=1}^{k} \mathbf{p}_s(t) e^{\lambda_s t} \tag{8}$$

dove $\lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_k$ sono gli autovalori distinti di $\mathbf{A}$, di molteplicità $m_1,\ m_2, ...,\ m_k$, e $\mathbf{p}_s(t)$ è un vettore di polinomi in t, di grado $r_s \le m_s - 1$ e contenente m_s costanti arbitrarie.

La soluzione generale del sistema (4), essendo $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}\,\mathbf{x}(t)$, si ottiene, poi, da

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{y}(t)$$

e ha la stessa struttura di quella di $\mathbf{y}(t)$.

Ovviamente resta aperto il problema di trovare la matrice $\mathbf{S}$ che realizzi la triangolarizzazione. Per una dimostrazione completa di quanto su indicato si può consultare il classico testo di G. Sansone, Equazioni Differenziali nel Campo Reale, Zanichelli Editore, Bologna, 1948, oppure J. P. Cecconi, G. Stampacchia, Analisi Matematica, vol. 2, Liguori, Napoli, 1983.

In modo schematico possiamo dire che, nel caso la matrice $\mathbf{A}$ non sia diagonalizzabile, la soluzione del sistema (4) si ottiene sommando funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ dei tipi seguenti:

(a) la funzione $c_s \mathbf{v}^s e^{\lambda_s t}$,

se λ_s è una radice reale, semplice (o anche se λ_s non è radice semplice ma è regolare), dove $\mathbf{v}^s$ è un qualsiasi autovettore associato a λ_s e c_s è una costante arbitraria, che può comunque essere "incorporata" in $\mathbf{v}^s$;

(b) la funzione $e^{at}\left[\mathbf{k}^1 \cos bt + \mathbf{k}^2 \sin bt\right],\ \mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2 \in \mathbb{R}^n$,

se $\lambda_s = a + ib$ è una radice complessa, semplice (allora tra gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ comparirà anche la radice complessa coniugata $\overline{\lambda}_s = a - ib$);

(c) la funzione $e^{at}\mathbf{p}_s(t)$,

se λ_s è una radice reale, multipla con molteplicità r, essendo $\mathbf{p}_s(t)$ un vettore di polinomi in t, di grado al più $r-1$, ma contenente r costanti arbitrarie;

(d) la funzione $e^{at}\left(\mathbf{p}_s(t) \cos bt + \mathbf{q}_s(t) \sin bt\right)$,

se $\lambda_s = a + ib$ è una radice complessa, multipla con molteplicità r (allora tra gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ c'è anche la radice complessa coniugata $\overline{\lambda}_s = a - ib$, con la stessa molteplicità, valendo per $\mathbf{p}_s(t)$ e $\mathbf{q}_s(t)$ quanto visto per il caso (c)).

Come ulteriore chiarimento di quanto su indicato si vedano gli esempi 2, 3 e 4.

Si può osservare, infine, che se la matrice $\mathbf{A}$ è di ordine 2, con autovalore λ, doppio, oppure è di ordine 3, con autovalore λ, triplo, oppure è di ordine n, con un solo autovaloreλ, di molteplicità n, essa è diagonalizzabile se e solo se ... è già in forma diagonale! Risulta infatti $m_G(\lambda) = n - \mathsf{ran}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ ed è $\mathsf{ran}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ se e solo se $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, ossia se e solo se $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}$.

2.3 Espressione esplicita generale della soluzione tramite la matrice esponenziale

Un ulteriore modo, formalmente compatto ed elegante, per esprimere la soluzione del sistema (4), senza dover esaminare la possibilità o meno di diagonalizzare la matrice $\mathbf{A}$, è quello che fa uso della cosiddetta *matrice esponenziale.*

Similmente alla serie esponenziale

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + ...$$

(serie che può anche essere definita nel campo complesso), se consideriamo una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, è possibile definire la *matrice esponenziale* di $\mathbf{A}$ nel seguente modo

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \tfrac{\mathbf{A}^2}{2!} + \tfrac{\mathbf{A}^3}{3!} + ... \tag{9}$$

ove $\mathbf{A}^k$ denota la k-esima potenza di $\mathbf{A}$, essendo $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$. Si dimostra che la serie (9) è convergente, ove la convergenza della serie si intende naturalmente componente per componente; sarà allora

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}. \tag{10}$$

Il calcolo degli elementi della matrice $e^{\mathbf{A}}$ non è, in genere, semplice, a meno che la matrice $\mathbf{A}$ non sia una matrice diagonale: $\mathbf{A} = \mathsf{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$; solo in questo caso, come è facile verificare, la matrice $e^{\mathbf{A}}$ è anch'essa una matrice diagonale: $e^{\mathbf{A}} = \mathsf{diag}\{e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda_n}\}$.

E' invece semplice ricavare l'espressione del determinante della matrice esponenziale, attraverso la nozione di *traccia* della matrice $\mathbf{A} : \mathsf{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$; risulta infatti

$$\det e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{tr}\mathbf{A}}.$$

Proprietà della matrice esponenziale sono le seguenti:

(a) $\quad e^{t\mathbf{A}} \cdot e^{s\mathbf{A}} = e^{(t+s)\mathbf{A}}, \quad s,\ t \in \mathbb{R};$

(b) $\quad \left[e^{t\mathbf{A}}\right]^{-1} = e^{-t\mathbf{A}};$

(c) $\quad \dfrac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{A}\, e^{t\mathbf{A}};$

(d) $\quad e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$ *solo* nel caso sia $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Per caratterizzare ulteriormente la matrice esponenziale, considerata, ad esempio, la matrice $\mathbf{A}$ seguente

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix},$$

si ottiene $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & t^3 \\ -t^3 & 0 \end{bmatrix}$ e, quindi, come è facile verificare per induzione, per ogni intero k si ha:

$$\mathbf{A}^{2k} = \begin{bmatrix} (-1)^k\, t^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k\, t^{2k} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^k\, t^{2k+1} \\ -(-1)^k\, t^{2k+1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto la relativa matrice esponenziale è la seguente:

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ -\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{bmatrix}$$

e, con riferimento allo sviluppo in serie di Mac Laurin, si ha infine

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Si può osservare, inoltre, che, data la matrice $\mathbf{A}$ seguente

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

si ha $\mathbf{A}^2 = 0$, $\mathbf{A}^3 = 0$, e così anche i successivi addendi della (9), cosicchè $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A}$ e risulta

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale risultato è un caso particolare di una situazione un po' più generale come nel seguito indicato.

Si consideri la matrice $\mathbf{N}$, di ordine n, seguente

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Tale matrice di significativa importanza nelle procedure risolutive nel seguito indicate, differisce dalla matrice identica $\mathbf{I}$ in quanto ha tutti elementi pari a 1 sulla prima super-diagonale, anzichè sulla diagonale principale, mentre sono pari a 0 tutti gli altri elementi.

Si può verificare che la matrice $\mathbf{N}^2$ ha la seconda super-diagonale tutta costituita da elementi pari a 1, mentre gli altri elementi sono nulli e similmente si ha per le successive potenze di $\mathbf{N}$ fino a $\mathbf{N}^n = \mathbf{0}$. Tale matrice $\mathbf{N}$ è, quindi, *nilpotente*[6] di indice n. Quindi

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{N}} &= \mathbf{I} + t\mathbf{N} + \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{N}^2 + ... + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\mathbf{N}^{n-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & ... & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ 0 & 1 & t & ... & ... & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definita e illustrata in tal modo la matrice esponenziale associata alla matrice $\mathbf{A}$, vediamo ora il seguente fondamentale Teorema 6 la cui validità è indipendente dal fatto che la matrice $\mathbf{A}$ sia o meno diagonalizzabile.

Teorema 6

Dato il sistema omogeneo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$, con $\mathbf{A}$ matrice, di ordine n, si ha quanto segue:

(i) le colonne della matrice $e^{t\mathbf{A}}$ formano un sistema fondamentale di soluzioni del sistema e l'integrale generale è

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\,\mathbf{c},$$

ove $\mathbf{c}$ è un vettore arbitrario, con $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ se ci interessano le soluzioni reali;

(ii) la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ è

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0, t_0) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\,\mathbf{x}^0. \tag{12}$$

Dimostrazione

Come indicato, $\dfrac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{A}\,e^{t\mathbf{A}}$ e, quindi, per ogni vettore $\mathbf{c}$ di costanti, si ha che $e^{t\mathbf{A}}\,\mathbf{c}$ è soluzione del sistema. In particolare, assumendo $\mathbf{c} = \mathbf{e}^1$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}^2$, ..., $\mathbf{c} = \mathbf{e}^n$, dove $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, ..., $\mathbf{e}^n$ sono i vettori fondamentali di $\mathbb{R}^n$, si deduce che ogni colonna della matrice $e^{t\mathbf{A}}$ è soluzione. Essendo poi $\det e^{t\mathbf{A}} = e^{t(\mathrm{tr}\mathbf{A})} > 0$, le colonne di $e^{t\mathbf{A}}$ sono linearmente indipendenti.

Con $t = t_0$, la (12) fornisce

$$\mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}^0, t_0) = e^{0\mathbf{A}}\,\mathbf{x}^0 = \mathbf{I}\,\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0. \qquad \square$$

Per quanto riguarda il calcolo effettivo della matrice $e^{t\mathbf{A}}$, vediamo dapprima il caso in cui la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile e poi quello in cui non è diagonalizzabile.

[6] Una matrice quadrata $\mathbf{A}$ è *nilpotente,* di indice k, se esiste un intero k tale che $\mathbf{A}^k = 0$.

2.3a La matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile

Nel caso la matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, sia *diagonalizzabile*, ritroviamo la soluzione generale (5): $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}^1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}^2\, e^{\lambda_2 t} + ... + c_n\mathbf{v}^n\, e^{\lambda_n t}$, ove $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, ..., \mathbf{v}^n$ sono gli n autovettori l.i. che la matrice $\mathbf{A}$ ammette. Posto, infatti, $\mathbf{S} = [\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, ..., \mathbf{v}^n]$, si ha

$$\mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{S} = \mathsf{diag}\,\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} = \mathbf{D}$$

da cui $\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\mathbf{D}\,\mathbf{S}^{-1}$ e, di conseguenza, si ha

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{S}\,\mathbf{D}\,\mathbf{S}^{-1}}.$$

Osserviamo ora che, con $\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\mathbf{D}\,\mathbf{S}^{-1}$, si ottiene

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \left(\mathbf{S}\,\mathbf{D}\,\mathbf{S}^{-1}\right)\left(\mathbf{S}\,\mathbf{D}\,\mathbf{S}^{-1}\right) = \mathbf{S}\,\mathbf{D}\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\right)\mathbf{D}\,\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\,\mathbf{D}^2\,\mathbf{S}^{-1}$$

e, in generale,

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{S}\,\mathbf{D}^k\,\mathbf{S}^{-1}.$$

Tenendo presente la (10), $e^{t\mathbf{A}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{t^3\mathbf{A}^3}{3!} + ...$, si ha

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{I} + t\,\mathbf{S}\,\mathbf{D}\,\mathbf{S}^{-1} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{S}\,\mathbf{D}^2\,\mathbf{S}^{-1} + \frac{t^3}{3!}\mathbf{S}\,\mathbf{D}^3\,\mathbf{S}^{-1} + ... = \\ &= \mathbf{S}\left(\mathbf{I} + t\,\mathbf{D} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{D}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{D}^3 + ...\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\,e^{t\mathbf{D}}\,\mathbf{S}^{-1}, \end{aligned}$$

e quindi

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{S}\,\mathbf{D}\,\mathbf{S}^{-1}} = \mathbf{S}\,e^{t\mathbf{D}}\,\mathbf{S}^{-1}.$$

Nel caso in esame, l'integrale generale è allora il seguente

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}\,e^{t\mathbf{D}}\,\mathbf{S}^{-1}\cdot\mathbf{c}.$$

Osservando che $\mathbf{S}^{-1}\cdot\mathbf{c}$ è un vettore arbitrario che, per comodità, continuiamo a indicare $\mathbf{c}$ $\left(\mathbf{S}^{-1}\cdot\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}\right)$, l'espressione dell'integrale generale si può riscrivere, infine, nella seguente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{S}\,e^{t\mathbf{D}}\,\mathbf{c} = [\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, ..., \mathbf{v}^n]\cdot\mathsf{diag}\left\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, ..., e^{\lambda_n t}\right\}\cdot\mathbf{c} = \\ &= c_1\mathbf{v}^1\,e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}^2\,e^{\lambda_2 t} + ... + c_n\mathbf{v}^n\,e^{\lambda_n t}. \end{aligned}$$

che coincide con la (5).

2.3b La matrice $\mathbf{A}$ non è diagonalizzabile

Nel caso la matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, *non sia diagonalizzabile*, determinata la matrice esponenziale $e^{t\mathbf{A}}$, si perviene a una formula risolutiva generale del sistema (4), $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$, con l'utilizzo della cosiddetta *forma canonica di Jordan*, come nel seguito sarà indicato.

A caratterizzazione della forma canonica di Jordan possiamo dire che essa, in un certo modo, è un raffinamento di quella triangolare di Schur, nel senso che con la forma canonica di Jordan si trasforma la matrice assegnata **A** in una matrice quanto più possibile "vicina" a una matrice diagonale (di fatto si trasforma **A** in una matrice "diagonale a blocchi") e avente gli autovalori della matrice **A** sulla diagonale principale.

Una matrice **J** (reale o complessa), quadrata, di ordine n, si dice in forma canonica di Jordan se è nella forma

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \mathbf{J}_m \end{bmatrix},$$

ove $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, ..., \mathbf{J}_m$ sono sotto-matrici quadrate della forma

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Tali matrici $\mathbf{J}_i$, di ordine q_i, sono dette "blocchi di Jordan", con $q_1 + q_2 + ... + q_m = n$.

Si può osservare quanto segue:

(a) si ha $\mathbf{J}_i = \lambda_i \, \mathbf{I}_{q_i} + \mathbf{N}_{q_i}$, ove $\mathbf{N}_{q_i}$ è del tipo (11);

(b) se $\mathbf{J}_i$ e $\mathbf{J}_j$ sono blocchi distinti, è consentito sia $\lambda_i = \lambda_j$;

(c) non è escluso che la dimensione di qualche blocco si riduca a 1;

(d) la matrice **J** è diagonale se e solo se tutti i blocchi hanno dimensione 1 (e sono, quindi, costituiti dal solo autovalore λ_i). In questo caso la matrice A è diagonalizzabile e si fa riferimento a quanto indicato in precedenza.

Teorema 7 (di Jordan)

Ogni matrice **A**, di ordine n, reale o complessa, è simile a una matrice in forma canonica di Jordan. Più precisamente: siano $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{C}$ gli autovalori distinti della matrice **A** e siano $m_A(\lambda_1), m_A(\lambda_2), ..., m_A(\lambda_r)$ e $m_G(\lambda_1), m_G(\lambda_2), ..., m_G(\lambda_r)$, rispettivamente, le molteplicità algebriche e geometriche dei suddetti autovalori. Allora esistono due matrici **P** e **J**, di ordine n, tali che **P** è non singolare, **J** è in forma canonica di Jordan e si ha $\mathbf{A} = \mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{P}^{-1}$. Inoltre, per $1 \le i \le r$, il numero dei blocchi di Jordan della matrice **J**, relativi all'autovalore λ_i, e la somma dei loro ordini valgono, rispettivamente, $m_G(\lambda_i)$ e $m_A(\lambda_i)$.

Il Teorema 7 afferma dunque che per ogni matrice quadrata **A**, esiste una matrice di passaggio **P**, regolare, tale che la matrice $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}$ è in forma di Jordan e, come si può dimostrare, la matrice **J** è unica a meno di permutazione dei blocchi.

Si può osservare che in relazione alla matrice **J** valgono le seguenti proprietà.

(a) Gli elementi λ_i, che compaiono sulla diagonale principale di ogni blocco $\mathbf{J}_i$, sono gli autovalori della matrice **A** (abbiamo già osservato che blocchi distinti possono avere uguali autovalori).

(b) A ogn blocco $\mathbf{J}_i$ corrisponde un unico autovettore della matrice **A**, relativo all'autovalore λ_i (a meno, ovviamente, di multipli scalari).

Autovettori corrispondenti a blocchi diversi sono linearmente indipendenti e, quindi, il numero dei blocchi in cui compare uno stesso λ_i è uguale alla dimensione dell'autospazio corrispondente, ovvero è uguale alla molteplicità geometrica $m_G(\lambda_i)$.

(c) Come su indicato, i blocchi hanno tutti dimensione 1 se e solo se la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile ed, equivalentemente, se e solo se $m_G(\lambda_i) = m_A(\lambda_i)$, per ogni $i = 1, 2, ..., m$. In tal caso $\mathbf{J} = \mathbf{D} = \mathsf{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$.

(d) Se un autovalore λ_i non è reale, i blocchi relativi a λ_i e a $\overline{\lambda_i}$ sono in egual numero e hanno le stesse dimensioni.

Come esempio consideriamo, innanzitutto, il caso più semplice di una matrice $\mathbf{A}$, di ordine 2, non diagonalizzabile. Per quanto indicato, la sua forma canonica di Jordan non può che essere

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Con una matrice $\mathbf{A}$, di ordine 3, non diagonalizzabile, in relazione ai suoi autovalori consideriamo i seguenti casi e, in relazione a ciascuno di essi, determiniamo la corrispondente forma canonica di Jordan:

(a) la matrice $\mathbf{A}$ ha due autovalori distinti λ_1, λ_2, con $m_A(\lambda_1) = 2$, $m_G(\lambda_1) = 1$ e $m_A(\lambda_2) = m_G(\lambda_2) = 1$, e, quindi, la forma canonica di Jordan è del tipo

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}; \tag{13}$$

(b) la matrice $\mathbf{A}$ ha un solo autovalore λ, con $m_A(\lambda) = 3$ e $m_G(\lambda) = 1$, e, quindi, la forma canonica di Jordan è del tipo

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \tag{14}$$

(c) la matrice $\mathbf{A}$ ha un solo autovalore λ, con $m_A(\lambda) = 3$ e $m_G(\lambda) = 2$, e,quindi, la forma canonica di Jordan è del tipo

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Si osservi che il numero degli elementi pari a 1 al di sopra della diagonale principale coincide con la differenza tra la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica dell'autovalore λ.

Accenniamo ora al procedimento di determinazione della matrice di passaggio $\mathbf{P}$ che individua la forma canonica di Jordan $\mathbf{J}$ della matrice $\mathbf{A}$ illustrandola con alcuni esempi non ritenendo adatta, in questa sede, la discussione della questione in modo generale.

Con riferimento a una matrice $\mathbf{A}$, di ordine 2, non diagonalizzabile, premoltiplichiamo per $\mathbf{P}$ entrambi i membri dell'uguaglianza $\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{J}$, ottenendo $\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{P}\,\mathbf{J}$.

Denotate con $\mathbf{v}^1$ e $\mathbf{v}^2$ le colonne della matrice $\mathbf{P}$, si ha

i) $\quad \mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{e}^1 = \mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{e}^1$, da cui $\mathbf{A}\ \mathbf{v}^1 = \mathbf{P}\ (\lambda\,\mathbf{e}^1) = \lambda\,\mathbf{v}^1$;

ii) $\quad \mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{e}^2 = \mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{e}^2$, da cui $\mathbf{A}\ \mathbf{v}^2 = \mathbf{P}\ (\mathbf{e}^1 + \lambda\,\mathbf{e}^2) = \mathbf{v}^1 + \lambda\,\mathbf{v}^2$.

Si osserva, quindi, che la prima colonna $\mathbf{v}^1$ di $\mathbf{P}$ deve essere un autovettore associato all'autovalore λ, mentre la seconda colonna $\mathbf{v}^2$ di $\mathbf{P}$ deve verificare il sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1 + \lambda\,\mathbf{v}^2$; si ha perciò $\mathbf{A}\,\mathbf{v}^2 - \lambda\,\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1$, ossia

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\ \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1. \tag{16}$$

Poichè $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\ \mathbf{v}^1 = \mathbf{0}$, l'equazione (16) è equivalente alla seguente

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\ \mathbf{v}^2 = \mathbf{0},$$

ma con $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\ \mathbf{v}^2 \neq \mathbf{0}$.

Si veda, a tal riguardo, l'Esempio 5.

Vediamo ora la struttura della matrice di passaggio $\mathbf{P}$ di una matrice $\mathbf{A}$, di ordine 3, avente un solo autovalore λ, con $m_A(\lambda) = 3$, distinguendo i seguenti casi a seconda dei valori assunti da $m_G(\lambda)$.

(*a*) Sia $\quad m_G(\lambda) = 1 \quad$ (in tal caso, la forma canonica di Jordan sarà del tipo (14)).

Denotate con $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$, $\mathbf{v}^3$ le colonne di $\mathbf{P}$, la relazione $\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{P}\,\mathbf{J}$ implica quanto segue:

i) $\quad \mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{e}^1 = \mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{e}^1$, da cui $\mathbf{A}\ \mathbf{v}^1 = \mathbf{P}\ (\lambda\,\mathbf{e}^1) = \lambda\,\mathbf{v}^1$;

ii) $\quad \mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{e}^2 = \mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{e}^2$, da cui $\mathbf{A}\ \mathbf{v}^2 = \mathbf{P}\ (\mathbf{e}^1 + \lambda\,\mathbf{e}^2) = \mathbf{v}^1 + \lambda\,\mathbf{v}^2$;

iii) $\quad \mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{e}^3 = \mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{e}^3$, da cui $\mathbf{A}\ \mathbf{v}^3 = \mathbf{P}\ (\mathbf{e}^2 + \lambda\,\mathbf{e}^3) = \mathbf{v}^2 + \lambda\,\mathbf{v}^3$.

Da quanto indicato si ha che la prima colonna $\mathbf{v}^1$ di $\mathbf{P}$ è costituita da un autovettore associato all'autovalore λ, mentre la seconda e la terza colonna, $\mathbf{v}^2$ e $\mathbf{v}^3$, di $\mathbf{P}$ si ottengono, rispettivamente, risolvendo i seguenti sistemi lineari:

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\ \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1;$$

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\ \mathbf{v}^3 = \mathbf{v}^2.$$

(*b*) Sia $\quad m_G(\lambda) = 2 \quad$ (in tal caso, la forma canonica di Jordan sarà del tipo (15)).

Denotate con $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$, $\mathbf{v}^3$ le colonne di $\mathbf{P}$, la relazione $\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{P}\,\mathbf{J}$ implica quanto segue:

i) $\quad \mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{e}^1 = \mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{e}^1$, da cui $\mathbf{A}\ \mathbf{v}^1 = \mathbf{P}\ (\lambda\,\mathbf{e}^1) = \lambda\,\mathbf{v}^1$;

ii) $\quad \mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{e}^2 = \mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{e}^2$, da cui $\mathbf{A}\ \mathbf{v}^2 = \mathbf{P}\ (\mathbf{e}^1 + \lambda\,\mathbf{e}^2) = \mathbf{v}^1 + \lambda\,\mathbf{v}^2$;

iii) $\quad \mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{e}^3 = \mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{e}^3$, da cui $\mathbf{A}\ \mathbf{v}^3 = \mathbf{P}\,\lambda\,\mathbf{e}^3 = \lambda\,\mathbf{v}^3$.

Da quanto indicato si ha che la prima e la terza colonna, $\mathbf{v}^1$ e $\mathbf{v}^3$, di $\mathbf{P}$ sono costituite da due autovettori linearmente indipendenti, associati all'autovalore λ, mentre la seconda colonna $\mathbf{v}^2$ di $\mathbf{P}$ si ottiene risolvendo il seguente sistema lineare:

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\ \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1.$$

Si vedano, a tal riguardo, gli Esempio 6 e 7.

Possiamo ora dare la seguente definizione.

Definizione 1

Considerata una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, con λ autovalore di $\mathbf{A}$, un vettore $\mathbf{v}$, non nullo, è detto *autovettore generalizzato* (destro) di $\mathbf{A}$, relativo a λ, se esiste un intero $p \geq 1$ tale che

$$(\mathbf{A}{-}\lambda\mathbf{I})^p \ \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Il più piccolo intero p, tale che $(\mathbf{A}{-}\lambda\mathbf{I})^p \ \mathbf{v} = 0$, si dice *indice* dell'autovettore generalizzato.

Dalla definizione segue che $\mathbf{v}$ è un autovettore generalizzato relativo a λ, di indice p, se $(\mathbf{A}{-}\lambda\mathbf{I})^{p-1} \ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $(\mathbf{A}{-}\lambda\mathbf{I})^p \ \mathbf{v} = \mathbf{0}$. In particolare, gli autovettori generalizzati di indice 1 sono precisamente gli usuali autovettori; infatti, con $p = 1$, le condizioni precedenti diventano $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$.

Dato un autovettore generalizzato $\mathbf{v}$ di indice p, definiamo per ricorrenza una successione di p autovettori generalizzati $\mathbf{w}^k$ ponendo: $\mathbf{w}^p = \mathbf{v}, \quad \mathbf{w}^{k-1} = (\mathbf{A}{-}\lambda\mathbf{I}) \ \mathbf{w}^k$, per $k = 2, 3, ..., p$. Otteniamo così p vettori $\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, ..., \mathbf{w}^p$, dove $\mathbf{w}^p$ è l'autovettore generalizzato $\mathbf{v}$ iniziale.

Per definizione $\mathbf{w}^k = (\mathbf{A}{-}\lambda\mathbf{I})^{q-k} \ \mathbf{v}$, per $k = 1, 2, ..., q$, quindi $\mathbf{w}^k$ è un autovettore generalizzato di indice k; in particolare $\mathbf{w}^1$ è un autovettore (usuale) di $\mathbf{A}$.

Osserviamo che la relazione $\mathbf{w}^{k-1} = (\mathbf{A}{-}\lambda\mathbf{I}) \ \mathbf{w}^k$, che definisce $\mathbf{w}^{k-1}$ a partire da $\mathbf{w}^k$, si può riscrivere nella forma

$$\mathbf{A}\,\mathbf{w}^k = \lambda\mathbf{w}^k + \mathbf{w}^{k-1}, \qquad \text{con } k = 2, 3, ..., p.$$

Si vede così che $\mathbf{w}^{k-1}$ fornisce una misura di quanto $\mathbf{w}^k$ è "lontano" dall'essere un vero autovettore. Per il vettore $\mathbf{w}^1$, che, come abbiamo osservato, è un vero autovettore, vale invece la relazione

$$\mathbf{A}\,\mathbf{w}^1 = \lambda\mathbf{w}^1.$$

Definizione 2

Una *catena di autovettori generalizzati di lunghezza* $p \geq 1$, relativa all'autovalore λ della matrice $\mathbf{A}$, è una successione finita $\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, ..., \mathbf{w}^p$ di vettori, non nulli, con le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}\,\mathbf{w}^1 = \lambda\mathbf{w}^1; \\ &\mathbf{A}\,\mathbf{w}^k = \lambda\mathbf{w}^k + \mathbf{w}^{k-1}, \qquad \text{con } k = 2, 3, ..., p. \end{aligned}$$

Utilizzando le suddette catene si possono costruire le colonne (linearmente indipendenti) della matrice $\mathbf{P}$ che realizza la forma canonica di Jordan della matrice $\mathbf{A}$.

La ricerca della matrice di passaggio $\mathbf{P}$, e quindi della matrice di Jordan $\mathbf{J}$, relative alla matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, equivale alla ricerca di catene di Jordan, relative ad $\mathbf{A}$, il cui numero e la cui lunghezza siano in accordo con l'enunciato del Teorema 7 e tali che i loro vettori costituiscano complessivamente una base di $\mathbb{C}^n$.

Per la procedura generale, che non presentiamo dettagliatamente in questa sede, si possono vedere i seguenti autori A. Bacciotti e F. Ricci, Lezioni di Analisi Matematica 2, Levrotto

& Bella, Torino, 1991; D. Fürst, Introduzione all'Algebra Lineare - Parte Seconda, CEDAM, Padova, 1982; C. Citrini, Analisi Matematica 2, Bollati Boringhieri, Torino, 1992.

Una volta determinata la forma canonica di Jordan della matrice $\mathbf{A} = \mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{P}^{-1}$, per definizione di $e^{t\mathbf{A}}$, risulta

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!} \left(\mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{P}^{-1}\right)^p = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!} \mathbf{P}\,\mathbf{J}^p\,\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!} \mathbf{J}^p \right) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\, e^{t\mathbf{J}}\, \mathbf{P}^{-1},$$

essendo $\left(\mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{P}^{-1}\right)^p = \overbrace{\left(\mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{P}^{-1}\right)\left(\mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{P}^{-1}\right) ... \left(\mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{P}^{-1}\right)}^{P \text{ fattori}} = \mathbf{P}\,\mathbf{J}^p\,\mathbf{P}^{-1}$.

Perciò il calcolo di $e^{t\mathbf{A}}$ può essere ricondotto al calcolo di $e^{t\mathbf{J}}$ e poichè

$$\mathbf{J}^p = \mathsf{diag}\left\{\mathbf{J}_1^p, \mathbf{J}_2^p, ..., \mathbf{J}_m^p, \right\}, \quad p = 0, 1, ...,$$

si ha

$$e^{t\mathbf{J}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!} \mathbf{J}^p = \mathsf{diag}\left\{e^{t\mathbf{J}_1}, e^{t\mathbf{J}_2}, ..., e^{t\mathbf{J}_m}\right\}.$$

Come già osservato, il blocco $\mathbf{J}_i$, di ordine q_i, ha la forma

$$\mathbf{J}_i = \lambda_i\,\mathbf{I}_{q_i} + \mathbf{N}_{q_i},$$

ove la matrice $\mathbf{N}_{q_i}$, con

$$\mathbf{N}_{q_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix},$$

è una matrice nilpotente di indice q_i, ossia $\left(\mathbf{N}_{q_i}\right)^{q_i} = \mathbf{0}$. Inoltre $t\lambda_i\,\mathbf{I}_{q_i}$ e $t\mathbf{N}_{q_i}$ commutano, perciò si ha

$$e^{t\mathbf{J}_i} = e^{t\lambda_i\,\mathbf{I}_{q_i}}\, e^{t\mathbf{N}_{q_i}} = e^{t\lambda_i}\, e^{t\mathbf{N}_{q_i}}$$

e, quindi,

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{N}_{q_i}} &= \mathbf{I}_{q_i} + t\mathbf{N}_{q_i} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{N}_{q_i}^2 + ... + \frac{t^{q_i-1}}{(q_i-1)!}\left(\mathbf{N}_{q_i}\right)^{q_i-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & ... & ... & \frac{t^{q_i-1}}{(q_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & \frac{t^2}{2!} & ... \\ 0 & ... & ... & ... & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & & ... & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi tutti gli elementi per esprimere formalmente la soluzione generale del sistema (4), $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$, applicando la procedura nel seguito schematizzata.

i) Data la matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, occorre trovare la matrice di passaggio $\mathbf{P}$ tale che $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}$ sia in forma di Jordan;

ii) occorre poi calcolare $e^{t\mathbf{J}}$;

iii) considerata la relazione $e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{P}\,e^{t\mathbf{J}}\,\mathbf{P}^{-1}$, si ha la soluzione generale $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\,\mathbf{c}$.

Osserviamo che la formulazione completa generale della soluzione del sistema (4), di cui al precedente punto *iii*), è stata ottenuta anche senza fare ricorso alla forma canonica di Jordan, da G. Trevisan (G. Trevisan, Un'espressione esplicita per l'integrale di un sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti. Applicazioni, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 31, 1961, 301-307). La suddetta formula compare anche nel testo di E. Coddington e R. Carlson, Linear Ordinary Differential Equations, SIAM, Philadelphia, 1997, e nel testo (piuttosto avanzato) di C. Parenti e A. Parmeggiani, Algebra Lineare ed Equazioni Differenziali Ordinarie, Springer, Milano 2010. Si possono vedere infine, per ulteriori approfondimenti, i testi, già citati, di Baciotti e Ricci e di Citrini.

Vediamo piuttosto, similmente a quanto già indicato a seguito della triangolarizzazione della matrice $\mathbf{A}$, come procedere alla determinazione della soluzione generale una volta ottenuta la forma canonica di Jordan, relativa alla matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}.$$

Si effettua anzitutto la trasformazione di variabili $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\,\mathbf{y}(t)$, ossia $\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$, e si considera il sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{y}(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{y}(t)$.

Il sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{y}(t)$ è facilmente risolvibile, data la particolare struttura della matrice $\mathbf{J}$. La soluzione generale del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$ si ottiene poi pre-moltiplicando per $\mathbf{P}$ la soluzione generale del sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{y}(t)$, ovvero $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\,\mathbf{y}(t)$.

Si vedano a tal proposito gli esempi 8, 9, 10, 11 e 12.

2.3c Il metodo di Putzer per calcolare la matrice esponenziale

Esamineremo ora brevemente un metodo pratico e diretto per calcolare la matrice esponenziale $e^{t\mathbf{A}}$, applicabile a matrici $\mathbf{A}$ diagonalizzabili o non diagonalizzabili, e che non richiede alcuna trasformazione per similitudine preliminare.
Tale metodo, inizialmente proposto da E. Putzer (E. Putzer, Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients, American Mathematical Monthly, 73, 1966, 2 - 7), successivamente ripreso da T. Apostol (T. Apostol, Some Explicit Formulas for the Exponential Matrix $e^{t\mathbf{A}}$, American Math. Monthly, 76, 1969, 289–292. T. M. Apostol, Calcolo - Volume terzo - Analisi 2, Bollati Boringhieri, Torino, 1978) e da altri autori, si basa sul noto Teorema di Cayley-Hamilton che segue.

Teorema 8 (di Cayley-Hamilton)

Considerata una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, con

$$f(\lambda) = |(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_1\lambda + c_0$$

il suo polinomio caratteristico, si ha $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, ovvero

$$\mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + ... + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

Il Teorema di Cayley-Hamilton mostra che la potenza n-esima di una qualsiasi matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, può essere espressa come combinazione lineare delle potenze inferiori: $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^{n-1}$. Segue, pertanto, che ognuna delle potenze superiori $\mathbf{A}^{n+1}, \mathbf{A}^{n+2}, ...,$ può esprimersi anch'essa come combinazione lineare di $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^{n-1}$. Perciò, nella serie che definisce $e^{t\mathbf{A}}$, ogni termine $\frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!}$, con $k \geq n$, è una combinazione lineare di $t^k\mathbf{I}, t^k\mathbf{A}, t^k\mathbf{A}^2, ..., t^k\mathbf{A}^{n-1}$. Possiamo perciò aspettarci che $e^{t\mathbf{A}}$ si possa esprimere come polinomio in $\mathbf{A}$, del tipo

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k(t)\,\mathbf{A}^k,$$

dove i coefficienti scalari $q_k(t)$ dipendono da t.

Putzer sviluppò due utili metodi per esprimere $e^{t\mathbf{A}}$ come polinomio in $\mathbf{A}$, il più semplice dei quali è precisato con il seguente teorema.

Teorema 9

Con $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ gli autovalori di una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, definiti i seguenti polinomi di $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} P_0(\mathbf{A}) &= \mathbf{I}; \\ P_k(\mathbf{A}) &= \prod_{m=1}^{k} (\mathbf{A} - \lambda_m\mathbf{I}), \quad k = 1, 2, ..., n, \end{aligned}$$

si ha

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t)\,P_k(\mathbf{A}), \tag{17}$$

dove i coefficienti scalari $r_1(t), r_2(t), ..., r_n(t)$ sono determinati, per ricorrenza, dal sistema di equazioni differenziali lineari seguente

$$\begin{cases} r_1'(t) = \lambda_1 r_1(t) \\ r_k'(t) = r_{k-1}(t) + \lambda_k r_k(t), \quad k = 2, 3, ...n; \\ r_1(0) = 1; \quad r_k(0) = 0; \quad k = 2, 3, ...n \ . \end{cases} \tag{18}$$

L'equazione (17) non esprime $e^{t\mathbf{A}}$ direttamente mediante le potenze di $\mathbf{A}$, bensì come combinazione lineare dei polinomi $P_0(\mathbf{A}), P_1(\mathbf{A}), ..., P_{n-1}(\mathbf{A})$. Tali polinomi si calcolano facilmente, una volta determinati gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ e altrettanto facile è il calcolo dei coefficienti scalari $r_1(t), r_2(t), ..., r_n(t)$, presenti nelle (18). Benchè i coefficienti scalari siano la soluzione di un sistema di equazioni differenziali lineari, la matrice di tale sistema è triangolare e le soluzioni, perciò, possono essere determinate "a cascata", una dopo l'altra.

Tom M. Apostol, seguendo i metodi di Putzer, ha ricavato alcuni teoremi per i casi particolari che riportiamo qui nel seguito.

Teorema 10

Se la matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, ha tutti i suoi autovalori uguali a λ, ossia $m_A(\lambda) = n$, si ha

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k .$$

Teorema 11

Se la matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, ha tutti i suoi autovalori *distinti*, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, si ha

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k} L_k(\mathbf{A}),$$

dove $L_k(\mathbf{A})$ è un polinomio in $\mathbf{A}$ di grado $n-1$, "polinomio di interpolazione di Lagrange", ottenuto come segue:

$$L_k(\mathbf{A}) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}}{\lambda_k - \lambda_j}, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Teorema 12

Se la matrice $\mathbf{A}$, di ordine $n \geq 3$, presenta due autovalori *distinti*, λ e μ, con molteplicità algebrica, rispettivamente, $m_A(\lambda) = n-1$ e $m_A(\mu) = 1$ (μ è radice semplice), si ha quanto segue

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k + \left\{ \frac{e^{\mu t}}{(\mu - \lambda)^{n-1}} - \frac{e^{\lambda t}}{(\mu - \lambda)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (\mu - \lambda)^k \right\} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{n-1} .$$

Tali teoremi di Apostol, applicati a matrici $\mathbf{A}$, di ordine $n = 2$ e $n = 3$, forniscono le formule nel seguito indicate (si veda anche G. Gilardi, Analisi Due, McGraw-Hill Libri Italia, Milano, 1996 e S. Salsa e A. Squellati, Esercizi di Analisi Matematica 2 - Parte Terza - Equazioni Differenziali Ordinarie, Masson, Milano, 1994):

(a) la matrice $\mathbf{A}$ è di ordine $n = 2$, con autovalore doppio λ, ovvero $m_A(\lambda) = 2$; si ha

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{\lambda t} \{\mathbf{I} + t (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\} ;$$

(b) la matrice $\mathbf{A}$ è di ordine $n = 2$, con 2 autovalori distinti λ e μ; si ha

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{\lambda t} \frac{\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}}{\lambda - \mu} + e^{\mu t} \frac{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}}{\mu - \lambda};$$

(c) la matrice $\mathbf{A}$ è di ordine $n = 3$, con un autovalore λ di molteplicità 3, ovvero $m_A(\lambda) = 3$; si ha

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{\lambda t} \left\{ \mathbf{I} + t (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) + \tfrac{1}{2} t^2 (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \right\} ;$$

(d) la matrice $\mathbf{A}$ è di ordine $n = 3$, con 3 autovalori distinti λ, μ e ν; si ha

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{\lambda t}\frac{(\mathbf{A}-\mu\mathbf{I})(\mathbf{A}-\nu\mathbf{I})}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)} + e^{\mu t}\frac{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})(\mathbf{A}-\nu\mathbf{I})}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)} + e^{\nu t}\frac{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mu\mathbf{I})}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)};$$

(e) la matrice $\mathbf{A}$ è di ordine $n = 3$, con un autovalore doppio λ, ovvero $m_A(\lambda) = 2$, e un autovalore semplice μ; si ha

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{\lambda t}\left\{\mathbf{I} + t(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\right\} + \frac{e^{\mu t}-e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^2}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2 - \frac{te^{\lambda t}}{\mu-\lambda}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2.$$

Si veda, nell'esempio 13, l'applicazione di quanto su indicato.

Per concludere l'argomento inerente al calcolo della matrice esponenziale, dobbiamo osservare che, da un punto di vista strettamente pratico, il caso di autovalori multipli non regolari non è di grande importanza, ai fini del calcolo numerico dell'integrale generale del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$. Tale caso, infatti, non costituisce una proprietà "robusta" della matrice $\mathbf{A}$, nel senso che $\mathbf{A}$ può essere sostituita da una matrice $\mathbf{B}$, con autovalori tutti *distinti*, i cui elementi assumono valori prossimi, quanto si vuole, ai corrispondenti valori di $\mathbf{A}$. Quanto precisato, in realtà, è il risultato del Teorema 13, che segue (si veda R. Bellman, Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill, New York, 1960) in cui si fa riferimento alla norma di una matrice.

Come noto, la *norma* $\|\mathbf{A}\|$ della matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, ad esempio, può essere definita come segue

$$\|\mathbf{A}\| = \max_j \sum_i |a_{ij}|\,; \qquad \|\mathbf{A}\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|\,; \qquad \|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_i \sum_j (a_{ij})^2},$$

ove, l'ultima è la cosiddetta "norma euclidea" o "norma di Frobenius" di $\mathbf{A}$.

Teorema 13 (Belman)

Data una matrice reale $\mathbf{A}$, di ordine n, si può sempre trovare una matrice $\mathbf{B}$, di ordine n, con autovalori distinti, tale che

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| \le \varepsilon,$$

ove $\varepsilon > 0$ può essere scelto arbitrariamente piccolo.

3. Stabilità della soluzione nulla di $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$

In riferimento al sistema dinamico *autonomo*[7]

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}\,(\mathbf{x}(t))\,, \tag{19}$$

[7] Un'equazione differenziale autonoma o un sistema di equazioni differenziali autonome è un'equazione differenziale o un sistema di equazioni differenziali ordinarie che non dipendono esplicitamente dalla variabile indipendente. I sistemi autonomi sono utilizzati nello studio dei sistemi dinamici, dove la variabile indipendente è il tempo, e in tal caso si parla di sistema tempo-invariante.

con I intervallo di $\mathbb{R}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}' : I \to \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, $t_0 \in I$, una *soluzione di equilibrio* $\mathbf{x}^*$ del sistema (19), ossia tale $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$, è detta *stabile*, secondo le modalità che seguono, se presenta le caratteristiche di volta in volta indicate.

3.1 Stabilità secondo Lyapunov

La soluzione di equilibrio $\mathbf{x}^*$ è detta *stabile secondo Lyapunov*, o *L-stabile*, per $t \geq t_0$, se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che, per ogni $\mathbf{x}^0$ che soddisfa la condizione

$$\left\| \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^* \right\| < \delta,$$

la soluzione $\mathbf{x}(t)$ del sistema (19), con condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \forall t \geq t_0$, soddisfa la condizione

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon.$$

3.2 Stabilità locale

La soluzione di equilibrio $\mathbf{x}^*$ è detta *localmente* (*asintoticamente*) *stabile* se $\mathbf{x}^*$ è L-stabile ed $\exists \delta_1 > 0$ tale che, per ogni soluzione $\mathbf{x}(t)$ del sistema (19), con condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, per la quale è

$$\left\| \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^* \right\| < \delta_1,$$

risulta

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*.$$

3.3 Stabilità globale

La soluzione di equilibrio $\mathbf{x}^*$ è detta *globalmente* (*asintoticamente*) *stabile* se

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*,$$

per *ogni* soluzione $\mathbf{x}(t)$ di (19).

In riferimento al sistema (4), $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$, con $\mathbf{A}$ matrice, di ordine n, osservato che l'origine $\mathbf{0}$ di $\mathbb{R}^n$, ovviamente, ne è soluzione di equilibrio analizziamo ora le condizioni che assicurano la stabilità della suddetta soluzione di equilibrio. Si ha in proposito il fondamentale teorema che segue.

Teorema 14

Con riferimento al sistema autonomo (4), $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$, la soluzione di equilibrio $\mathbf{x}^* = 0$ ha le seguenti caratteristiche:

(i) è globalmente asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ hanno parte reale negativa: $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$, $\forall i$;

(ii) è stabile secondo Lyapunov se e solo se tutti gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ hanno parte reale non positiva: $(\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0, \forall i)$ e gli autovalori, con parte reale nulla, sono regolari (la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica);

(iii) è instabile negli altri casi.

Dimostrazione

Per quanto riguarda la dimostrazione del Teorema 14, presentiamo solo le linee secondo le quali essa si articola, tenendo presente la struttura della soluzione generale del sistema (4).

Se $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sono gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, la soluzione generale è la somma di addendi del tipo seguente.

(a) $e^{\lambda_s t}\mathbf{p}_s(t)$, essendo λ_s un autovalore reale, con molteplicità algebrica $m_a(\lambda_s) = r$, e $\mathbf{p}_s(t)$ un vettore di polinomi di grado non superiore a $r - 1$;

(b) $e^{\alpha_s t}\left(\mathbf{p}_s(t)\cos\beta_s t + \mathbf{q}_s(t)\sin\beta_s t\right)$, essendo $\lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$ un autovalore complesso, con molteplicità algebrica $m_a(\lambda_s) = r$, e dove $\mathbf{p}_s(t)$ e $\mathbf{q}_s(t)$ hanno il solito significato.

Studiando il limite per $t \to +\infty$ di tali addendi, si nota che si hanno risultati diversi a seconda se λ_s è reale o complesso e, in quest'ultimo caso, a seconda del valore assunto dalla parte reale α_s.

Nel caso $\lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$ sia complesso:

se $\alpha_s < 0$, il limite è nullo;

se $\alpha_s > 0$, $\mathbf{x}(t)$ diverge all'infinito (può anche essere oscillante);

se $\alpha_s = 0$, si hanno due comportamenti distinti a seconda che il polinomio abbia grado zero (sia, cioè, una costante) o grado maggiore di zero;

nel primo caso, il limite non necessariamente esiste ma $\mathbf{x}(t)$ è comunque limitata;

negli altri casi, $\mathbf{x}(t)$ diverge all'infinito.

Si può osservare che il polinomio ha grado zero nei casi in cui all'autovalore λ_s si può associare un numero di autovettori linearmente indipendenti, pari alla sua molteplicità algebrica. □

Si può notare che per un sistema lineare del tipo (4) la stabilità asintotica dell'origine implica quella secondo Lyapunov.

Con riferimento alla matrice $\mathbf{A}$ del sistema (4) possiamo osservare che essa stessa può essere definita stabile come nel seguito indicato.

Definizione 3

Una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, è *stabile* quando i suoi autovalori hanno tutti parte reale negativa: $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0,\ \forall i$.

A tal riguardo riveste un ruolo fondamentale il Teorema di Routh-Hurwitz che fornisce condizioni necessarie e sufficienti per la negatività di ogni $\mathrm{Re}(\lambda_i)$, facendo riferimento solo agli elementi della matrice $\mathbf{A}$. Su tale teorema si basa il criterio seguente per determinare il numero di radici, a parte reale positiva e negativa, di un polinomio considerando i suoi coefficienti come ora precisato[8].

Criterio di Routh-Hurwitz

Sia $\mathbf{A}$ una matrice, di ordine n, e sia $S_i(\mathbf{A})$ la somma di tutti i suoi $\binom{n}{i}$ minori principali di ordine i (si dice anche che $S_i(\mathbf{A})$ è la "traccia di ordine i" della matrice $\mathbf{A}$; con $i = 1$ otteniamo la traccia usuale, $\mathsf{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$).

[8] Tale criterio può essere considerato una generalizzazione del criterio di Cartesio.

Posto

$$k_i = k_i(\mathbf{A}) = \begin{cases} (-1)^i S_i(\mathbf{A}), & \forall i = 1, 2, ..., n; \\ 0, \quad \forall i > n \ , \end{cases}$$

la matrice $\mathbf{A}$ è stabile se e solo se risulta

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_3 & k_5 & ... & k_{2i-1} \\ 1 & k_2 & k_4 & ... & k_{2i-2} \\ 0 & k_1 & k_3 & ... & k_{2i-3} \\ 0 & & k_2 & ... & k_{2i-4} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & k_i \end{vmatrix} > 0, \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Ciò implica $k_i > 0, \ \forall i = 1, 2, ..., n$.

In modo più esteso le condizioni del criterio possono essere scritte come segue:

$$k_1 > 0; \quad \begin{vmatrix} k_1 & k_3 \\ 1 & k_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} k_1 & k_3 & k_5 \\ 1 & k_2 & k_4 \\ 0 & k_1 & k_3 \end{vmatrix} > 0, \quad ..., \quad \begin{vmatrix} k_1 & k_3 & ... & 0 \\ 1 & k_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & k_n \end{vmatrix} > 0 \ .$$

Il criterio, comunque, è alquanto artificioso e l'onere computazionale è rilevante anche per n non troppo grande. Tentativi di semplificazione sono stati fatti giungendo a condizioni di Routh-Hurwitz "semplificate" che richiedono un numero minore di calcoli. Si veda, ad esempio, Y. Murata, Mathematics for Stability and Optimization of Economic System, Academic Press, New York, 1977.

Si può osservare quanto segue:

(a) una condizione solo necessaria per la stabilità della matrice $\mathbf{A}$ è data da $k_1 > 0$, $k_2 > 0, ...,$ $k_n > 0$, essendo $-k_1$ la traccia di $\mathbf{A}$ e $k_n = (-1)^n |\mathbf{A}|$;

(b) con $n = 2$, le condizioni di Routh-Hurwitz semplificate sono:

$$\mathsf{tr}(\mathbf{A}) < 0, \quad |\mathbf{A}| > 0.$$

Di conseguenza, solo per $n = 2$, le condizioni indicate in (a) sono anche sufficienti;

(c) con $n = 3$, le condizioni di Routh-Hurwitz semplificate sono:

$$\mathsf{tr}(\mathbf{A}) < 0, \quad |\mathbf{A}| < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{22} + a_{33} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & a_{11} + a_{33} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{11} + a_{22} \end{vmatrix} < 0 \ .$$

Una ulteriore condizione necessaria e sufficiente per la stabilità di una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, è dovuta a Lyapunov, come indicato nel teorema che segue.

Teorema 15 (di Lyapunov)

La matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, è stabile se e solo se esiste una matrice $\mathbf{B}$, simmetrica, di ordine n, definita positiva, tale che la matrice $\mathbf{B}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}$ è definita negativa.

Sono note, poi, varie condizioni sufficienti per la stabilità della matrice $\mathbf{A}$, alcune delle quali sono di notevole importanza in diverse applicazioni economiche. Per una rassegna di tali condizioni e lo studio delle loro connessioni si rimanda al lavoro di G. Giorgi, Stable and related matrices in economic theory, Control and Cybernetics, 32, 2003, 397-410.

Indicheremo nel seguito solo le condizioni di stabilità più importanti e, a tale scopo, premettiamo le seguenti definizioni.

Una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, è detta:

i) *Metzleriana* (in onore dell'economista americano L. A. Metzler, 1913-1980), se per i suoi elementi si ha $a_{ij} \geq 0$, $\forall i \neq j$;

ii) *Hicksiana* (in onore dell'economista inglese John Hichs, 1904-1989), o "matrice NP", se i suoi minori principali, di ordine r, hanno il segno di $(-1)^r$, $r = 1, 2, ..., n$.

Vediamo, ora, alcuni teoremi relativi alla stabilità della matrice $\mathbf{A}$.

Teorema 16

Una matrice $\mathbf{A}$, *simmetrica*, di ordine n, è stabile se e solo se è definita negativa.

Come noto una matrice $\mathbf{A}$, simmetrica, ha solo autovalori reali ed è definita negativa se e solo se tutti i suoi autovalori sono negativi.

Ricordiamo anche che una matrice $\mathbf{A}$, simmetrica, è definita negativa se e solo se i suoi minori principali di Nord-Ovest sono a segno alterno, cominciando dal segno negativo.

Si può osservare che, nel caso in esame, è equivalente fare riferimento a tutti i minori principali (e non solo a quelli di Nord-Ovest), per cui si può affermare che la matrice $\mathbf{A}$, simmetrica, è stabile se e solo se è Hicksiana.

Teorema 17

Una matrice $\mathbf{A}$, *Metzleriana*, di ordine n, è stabile se e solo se è Hicksiana.

Anche nel caso in esame, si può osservare che è equivalente fare riferimento soltanto ai minori principali di Nord-Ovest.

Se la matrice $-\mathbf{A}$ è Metzleriana, ossia $a_{ij} \leq 0$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, allora le condizioni di Hicks sono equivalenti a quelle di Hawkins-Simon: i minori principali di Nord-Ovest sono tutti positivi.

Una ulteriore condizione di stabilità per la matrice $\mathbf{A}$ si basa sulla seguente definizione.

Definizione 4

Una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, ha *diagonale dominante negativa* se si ha

$$a_{ii} < 0; \quad |a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad j = 1, 2, ..., n; \quad (\text{“dominanza per righe”})$$

oppure se si ha

$$a_{jj} < 0; \quad |a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad (\text{“dominanza per colonne”}).$$

Si può osservare che la matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, può avere diagonale dominante negativa per righe ma non per colonne e viceversa.

Teorema 18

Una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, con *diagonale dominante negativa,* è stabile.

Il Teorema 18 è stato generalizzato dall'americano L. McKenzie intrododucendo il concetto di matrice a diagonale quasi-dominante come segue.

Definizione 5

Una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, ha *diagonale quasi-dominante negativa*, se vale quanto segue:

$$a_{ii} < 0, \quad \forall i = 1, 2, ..., n,$$

ed esistono numeri positivi $d_1, d_2, ..., d_n$ tali che

$$d_i \, |a_{ii}| > \sum_{i \neq j} d_j \, |a_{ij}| \,, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad (\text{“quasi-dominanza per righe”})$$

oppure equivalentemente,

$$d_j \, |a_{jj}| > \sum_{i \neq j} d_i \, |a_{ij}| \,, \quad j = 1, 2, ..., n, \quad (\text{“quasi-dominanza per colonne”}).$$

Quanto su indicato consente di enunciare il seguente teorema.

Teorema 19 (di L. McKenzie)

Una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, con diagonale quasi-dominante negativa, è stabile (è indifferente fare riferimento alla quasi-dominanza per righe o a quella per colonne).

Si veda, a tal proposito, L. McKenzie, Matrices with dominant diagonals and economic theory; in K. J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes (Eds.), Mathematical Methods in the Social Sciences, Stanford University Press, 1960, 47-62. Per una rassegna di risultati sulle matrici a dagonale dominante e quasi-dominante, si veda G. Giorgi e C. Zuccotti, Matrici a diagonale dominante: principali definizioni, proprietà e applicazioni, Report n. 318, Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia, Università di Pisa, 2009, (scaricabile dal sito del Dipartimento).

Per presentare la condizione di stabilità di una matrice introdotta da Samuelson premettiamo la seguente definizione.

Definizione 6

Una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, non necessariamente simmetrica, è *definita quasi-negativa* se vale quanto segue

$$x^{\mathrm{T}} \, \mathbf{A} \, x < 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Osserviamo che, poichè si ha

$$x^{\mathrm{T}} \, \mathbf{A} \, x = \tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \right) x,$$

la matrice $\mathbf{A}$ è definita quasi-negativa se e solo se la matrice simmetrica $\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$ è definita negativa.

Vale quindi il seguente teorema.

Teorema 20 (di Samuelson)

Una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, *definita quasi-negativa*, è stabile.

Dimostrazione

Se la matrice $\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ è definita negativa, la stessa proprietà vale per la matrice $\mathbf{I}\,\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{I}$, in quanto, ovviamente, $\mathbf{I}$ è definita positiva, e, quindi, vale quanto affermato dal Teorema 15 di Lyapunov. □

La condizione espressa nel Teorema 20 è stato introdotta da P. A. Samuelson nel suo celebre libro "Foundations of Economic Analysis", Harvard University Press, Harvard, 1947. Il merito di Samuelson è stato non solo quello di aver formalizzato il processo di aggiustamento dei prezzi (tâtonnement) in un modello di equilibrio walrasiano di puro scambio, ma anche di aver individuato le "vere" condizioni di stabilità per il suddetto processo, in contrapposizione alle condizioni precedentemente proposte da John R. Hicks nel suo "Value and Capital; An Inquiry Into Some Fundamental Principles of Economic Theory", Oxford, Clarendon Press, 1939. Trad. italiana Valore e capitale, Torino, UTET, 1954.

Raggruppiamo qui di seguito altre proprietà relative alla stabilità della matrice $\mathbf{A}$:

(1) $\mathbf{A}$ stabile $\nRightarrow$ $\mathbf{A}$ Hicksiana;

(2) $\mathbf{A}$ Hicksiana $\nRightarrow$ $\mathbf{A}$ stabile;

(3) $\mathbf{A}$ definita quasi-negativa $\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ Hicksiana;

(4) $\mathbf{A}$ Hicksiana $\nRightarrow$ $\mathbf{A}$ definita quasi-negativa;

(5) $\mathbf{A}$ stabile $\nRightarrow$ $\mathbf{A}$ definita quasi-negativa;

(6) $\mathbf{A}$ con diagonale negativa quasi-dominante $\nRightarrow$ $\mathbf{A}$ definita quasi-negativa;

(7) $\mathbf{A}$ con diagonale negativa quasi-dominante $\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ Hicksiana;

(8) $\mathbf{A}$ definita quasi-negativa $\nRightarrow$ $\mathbf{A}$ con diagonale negativa quasi-dominante;

(9) se $\mathbf{A}$ è Metzleriana vale quanto segue:

- **(9.1)** $\{\mathbf{A}$ con diagonale negativa quasi-dominante$\} \Leftrightarrow \{\mathbf{A}$ stabile$\}$;
- **(9.2)** $\{\mathbf{A}$ con diagonale negativa quasi-dominante$\} \Leftrightarrow \{\mathbf{A}$ Hicksiana$\}$;
- **(9.3)** $\{\mathbf{A}$ definita quasi-negativa$\} \Rightarrow \{\mathbf{A}$ con diagonale negativa quasi-dominante$\}$.

3.4 D-stabilità

Una interessante definizione di stabilità è stata derivata dallo studio del processo di tâtonnement per un modello di equilibrio generale walrasiano di puro scambio e porta al concetto di $\mathbf{D}$-stabilità come nel seguito indicato.

Definizione 7

Una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, è detta $\mathbf{D}$-*stabile*, se, per *ogni* matrice diagonale $\mathbf{D}$, con diagonale positiva, la matrice $\mathbf{D}\,\mathbf{A}$ è stabile.

Si può osservare quanto segue:

(i) la matrice $\mathbf{D}$ raccoglie le diverse "velocità di aggiustamento" dei prezzi nel suddetto processo di tâtonnement;

(ii) se la matrice $\mathbf{A}$ è $\mathbf{D}$-stabile, allora $\mathbf{A}$ è anche stabile; basta, infatti, assumere $\mathbf{D} = \mathbf{I}$.

Il teorema principale sulla $\mathbf{D}$-stabilità è dovuto a K. J. Arrow e M. Mc Manus e precisato in A note on dynamic stability, Econometrica, 26, 1958, 448-454.

Teorema 21 (di Arrow e Mc Manus)

Una matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, è $\mathbf{D}$-stabile se esiste una matrice diagonale $\mathbf{C}$, con diagonale positiva, tale che la matrice $\mathbf{A}^T\,\mathbf{C} + \mathbf{C}\,\mathbf{A}$ sia definita negativa.

É immediato notare che tale condizione, con $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, si riduce alla condizione "$\mathbf{A}^T + \mathbf{A}$ è definita negativa" la quale equivale alla condizione "$\mathbf{A}$ è definita quasi-negativa".

Valgono quindi le seguenti affermazioni:

(10) $\{\mathbf{A}$ definita quasi-negativa $\} \Rightarrow \{\mathbf{A}$ è $\mathbf{D}$-stabile$\}$;

e a maggior ragione:

(10.1) $\{\mathbf{A}$ definita negativa ($\mathbf{A}$ simmetrica)$\} \Rightarrow \{\mathbf{A}$ è $\mathbf{D}$-stabile$\}$.

Si può poi provare la seguente implicazione:

(12) $\{\mathbf{A}$ con diagonale negativa quasi-dominante$\} \Rightarrow \{\mathbf{A}$ è $\mathbf{D}$-stabile$\}$.

Dimostrazione

Se la matrice $\mathbf{A}$ ha diagonale negativa quasi-dominante, sappiamo che è stabile, ossia tutti i suoi autovalori hanno parte reale negativa. Come noto, se la matrice $\mathbf{A}$ ha diagonale quasi-dominante, esistono degli scalari $d_j > 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$ tali che

$$d_j\,|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} d_i\,|a_{ij}|\,,\ \ j = 1, 2, ..., n. \tag{20}$$

Dobbiamo dimostrare ora che $\mathbf{B}\,\mathbf{A}$ è stabile, ove $\mathbf{B}$ è una qualsiasi matrice diagonale con $b_{ii} > 0$, $\forall i$. Dividiamo e moltiplichiamo la (20) per $b_{jj} > 0$ (e per $b_{ii} > 0$) e otteniamo

$$\frac{d_j}{b_{jj}}\,|b_{jj}a_{jj}| > \sum_{i \neq j} \frac{d_i}{b_{ii}}\,|b_{ii}a_{ij}|\,,\ \ j = 1, 2, ..., n;$$

il rapporto $\dfrac{d_j}{b_{jj}} > 0$ soddisfa la condizione di matrice a diagonale quasi-dominante per la matrice $\mathbf{B}\,\mathbf{A}$. Essendo poi $a_{jj} < 0$ e $b_{jj} > 0$, per ogni j, sarà $b_{jj}a_{jj} < 0$ e quindi $\mathbf{B}\,\mathbf{A}$ ha diagonale negativa, ovvero, $\mathbf{B}\,\mathbf{A}$ è a diagonale negativa quasi-dominante e, perciò, è stabile. La matrice $\mathbf{A}$ è, quindi, $\mathbf{D}$-stabile. $\square$

Abbiamo precedentemente osservato (il risultato è dovuto a Samuelson) che se $\mathbf{A}$ è Hicksiana, non necessariamente è stabile e anche che, se $\mathbf{A}$ è stabile, non necessariamente è Hicksiana. É stato però provato (L. A. Metzler, Stability of multiple markets: the Hicks conditions, Econometrica, 13, 1945, 277-292) che se ogni sottomatrice principale di $\mathbf{A}$ è $\mathbf{D}$-stabile, allora $\mathbf{A}$ è Hicksiana.

Vale infine il seguente teorema che, anche se interessante, è spesso ignorato nella letteratura economica.

Teorema 22 (di Fisher - Fuller)

Se la matrice $\mathbf{A}$ è Hicksiana, esiste una matrice diagonale $\mathbf{D}$, con diagonale positiva, tale che $\mathbf{D\,A}$ è stabile.

Osserviamo che il Teorema 22, dovuto ai due matematici M. E. Fisher e A. T. Fuller (On the stabilization of matrices and the convergence of linear iterative processes, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 54, 1958, 417-425), afferma che, se la matrice $\mathbf{A}$, di ordine n, è Hicksiana, è sempre possibile trovare n particolari velocità di aggiustamento dei prezzi, velocità raccolte nella matrice diagonale $\mathbf{D}$, tali da rendere $\mathbf{D\,A}$ stabile.

Si può osservare, infine, che se la matrice $\mathbf{A}$ è Metzleriana, valgono le seguenti equivalenze:

(12) $\{\mathbf{A} \text{ stabile}\} \Leftrightarrow \{\mathbf{A} \text{ è } \mathbf{D}\text{-stabile}\} \Leftrightarrow \{\mathbf{A} \text{ Hicksiana}\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \{\mathbf{A} \text{ con diagonale negativa quasi-dominante}\}.$$

4. Esempi di supporto

Esempio 1

Considerato il seguente sistema, con la matrice $\mathbf{A}$ di ordine $n = 2$,

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),$$

si ha $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$ per $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$ ovvero due numeri complessi coniugati $0 \pm 1i$, con $a = 0$ e $b = 1$.

Con riferimento alla (6), la soluzione generale ha quindi la seguente espressione

$$\mathbf{x}(t) = e^{0t}\left(\mathbf{k}^1 \cos t + \mathbf{k}^2 \sin t\right) = \mathbf{k}^1 \cos t + \mathbf{k}^2 \sin t,$$

con $\mathbf{k}^1$ e $\mathbf{k}^2 \in \mathbb{R}^2$, ovvero del tipo $\mathbf{k}^1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ e $\mathbf{k}^2 = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$, e quindi si ha

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \sin t\ ,$$

dalla quale si ottiene

$$\mathbf{x}'(t) = -\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \cos t\ .$$

Per determinare $\mathbf{k}^1$ e $\mathbf{k}^2$ sostituiamo tale soluzione nel sistema assegnato ottenendo quanto segue:

$$\begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \cos t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \sin t \right)$$

cioè

$$\begin{bmatrix} -\alpha\sin t+\gamma\cos t \\ -\beta\sin t+\delta\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\cos t+\gamma\sin t \\ \beta\cos t+\delta\sin t \end{bmatrix}$$

ossia

$$\begin{bmatrix} -\alpha\sin t+\gamma\cos t \\ -\beta\sin t+\delta\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta\cos t+\delta\sin t \\ -\alpha\cos t-\gamma\sin t \end{bmatrix},$$

Per il principio di identità dei polinomi, dovrà quindi risultare

$$\begin{cases} \gamma &= \beta \\ -\alpha &= \delta \\ -\beta &= -\gamma \\ \delta &= -\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=\beta \\ \delta=-\alpha \end{cases}.$$

Nei due vettori $\mathbf{k}^1$ e $\mathbf{k}^2 \in \mathbb{R}^2$ compaiono 4 costanti: α e β sono arbitrarie, mentre γ e δ devono rispettare le condizioni trovate e, quindi, la soluzione generale, reale, del sistema è

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\cos t + \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}\sin t,$$

con α, $\beta \in \mathbb{R}$, e può anche essere riscritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \alpha\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \\ &= c_1\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esempio 2

Considerato il sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) ,$$

si ha $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$ e perciò l'equazione caratteristica ha radice reale, doppia $\lambda_{1,2} = 1$. La relativa molteplicità geometrica è $m_G = 2-\mathsf{ran}(\mathbf{A}-\lambda_{1,2}\mathbf{I})$, ed essendo $\mathbf{A}-\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, si ha $\mathsf{ran}(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = 1$, e, di conseguenza, $m_G = 1 < m_A = 2$. La matrice $\mathbf{A}$, perciò, *non* è diagonalizzabile e la soluzione generale è del seguente tipo:

$$\mathbf{x}(t) = e^t\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}\right).$$

I quattro parametri non sono del tutto arbitrari come è possibile determinare operando come segue:

con

$$\mathbf{x}'(t) = e^t\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}\right) + e^t\begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = e^t\left(\begin{bmatrix} \alpha+\gamma \\ \beta+\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}t\right),$$

sostituiamo nel sistema assegnato e otteniamo

$$e^t \left(\begin{bmatrix} \alpha + \gamma \\ \beta + \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} t \right) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot e^t \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} t \right);$$

dividiamo ambo i membri per e^t e otteniamo

$$\begin{bmatrix} \alpha + \gamma + ct \\ \beta + \delta + dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha + ct \\ \beta + dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + ct + 4b + 4dt \\ \beta + dt \end{bmatrix};$$

imponiamo le uguaglianze e otteniamo il seguente sistema di condizioni:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = \alpha + 4b & \Rightarrow \quad \gamma = 4\beta \\ ct = ct + 4dt & \Rightarrow \quad \delta = 0 \\ \beta + \delta = \beta \\ dt = dt \end{cases}$$

e di conseguenza, con α e β arbitrari, sarà $\gamma = 4\beta$ e $\delta = 0$.

La soluzione generale, infine, è la seguente

$$\mathbf{x}(t) = e^t \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\beta \\ 0 \end{bmatrix} t \right).$$

Esempio 3

In alternativa al metodo di risoluzione ora visto, la soluzione generale del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$, con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

può essere ottenuta applicando il metodo[9] di "triangolarizzazione", come nel seguito indicato.

L'equazione caratteristica

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & -3 \\ 0 & 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)^3 = 0$$

ha radice reale, tripla $\lambda_{1,2,3} = -1$, in relazione alla quale si ha

$$\mathbf{A} - \lambda_{1,2,3}\mathbf{I} = \mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

e, con $\mathsf{ran}(\mathbf{A} + \mathbf{I}) = 2$, la molteplicità geometrica è

[9] Per i dettagli, e i successivi passaggi algebrici, si veda A. Jeffrey, Linear Algebra and Ordinary Differential Equations, Blackwell, 1990.

$$m_G = 3 - \mathsf{ran}(\mathbf{A}+\mathbf{I}) = 3-2 = 1 < m_A = 3;$$

abbiamo, infatti, un solo autovettore linearmente indipendente:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \text{con } \alpha \neq 0;$$

la matrice $\mathbf{S}$ che realizza la triangolarizzazione è la seguente

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{con } |\mathbf{S}| = 4, \text{ e } \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

si ha quindi la matrice triangolare $\mathbf{T}$ seguente

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}\,\mathbf{A}\,\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

posto $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{T}\,\mathbf{y}(t)$, ossia

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) \\ y_2'(t) = 2y_1(t) - y_2(t) \\ y_3'(t) = y_2(t) - y_3(t)\ , \end{cases}$$

si ha $y_1(t) = c_1e^{-t}$ e quindi $y_2'(t) = 2c_1e^{-t} - y_2(t)$, ossia $y_2'(t) + y_2(t) = 2c_1e^{-t}$ da cui

$$\begin{aligned} y_2(t) \ &= e^{-t}\left(c_2 + \int 2c_1e^{-t}e^tdt\right) = e^{-t}\left(c_2 + 2c_1t\right) = \\ &= 2c_1t\,e^{-t} + c_2e^{-t}\ ; \end{aligned}$$

troviamo ora $y_3(t)$ come segue:

$$y_3'(t) = 2c_1t\,e^{-t} + c_2e^{-t} - y_3(t),$$

ossia

$$y_3'(t) + y_3(t) = 2c_1t\,e^{-t} + c_2e^{-t}$$

da cui

$$\begin{aligned} y_3(t) \ &= e^{-t}\left(c_3 + \int (2c_1te^{-t} + c_2e^{-t})e^tdt\right) = e^{-t}\left(c_3 + \int 2c_1tdt + \int c_2dt\right) = \\ &= e^{-t}\left(c_3 + c_1t^2 + c_2t\right) = e^{-t}\left(c_1t^2 + c_2t + c_3\right); \end{aligned}$$

trovato $\mathbf{y}(t)$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{-t} \\ (c_2 + 2c_1t)e^{-t} \\ (c_3 + c_2t + c_1t^2)\,e^{-t} \end{bmatrix} = \left(c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ t^2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)e^{-t},$$

si ha, infine, la soluzione generale del sistema assegnato $\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{y}(t)$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 + 2c_1 t \\ c_3 + c_2 t + c_1 t^2 \end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_3 + \frac{1}{2}c_2 t + \frac{1}{2}c_1 t^2 \\ -c_1 - \frac{1}{2}c_2 - c_1 t + c_3 + c_2 t + c_1 t^2 \\ -\frac{1}{2}c_2 - c_1 t + \frac{1}{2}c_3 + \frac{1}{2}c_2 t + \frac{1}{2}c_1 t^2 \end{bmatrix} e^{-t} = \\
&= \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_3 \\ -c_1 - \frac{1}{2}c_2 + c_3 \\ -\frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_2 t \\ -c_1 t + c_2 t \\ -c_1 t + \frac{1}{2}c_2 t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_1 t^2 \\ c_1 t^2 \\ \frac{1}{2}c_1 t^2 \end{bmatrix} \right) e^{-t} \, .
\end{aligned}
$$

Esempio 4

Ribadiamo che le diverse formulazioni dell'integrale generale del sistema (4) non dipendono dall'esistenza o meno di autovalori multipli (come si legge in qualche trattazione affrettata) ma piuttosto dalla possibilità o meno di diagolizzazione della matrice $\mathbf{A}$, ovvero se ogni autovalore multiplo è regolare (in tale caso la diagonalizzazione è possibile).

Risolviamo, ad esempio, il sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$, con

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.
$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 1$, con $m_A(\lambda_{2,3}) = m_A(1) = 2$, mentre, con

$$
\mathsf{ran}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathsf{ran} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 1,
$$

la molteplicità geometrica $m_G\left(\lambda_{2,3}\right) = m_G(1) = 3 - \mathsf{ran}(\mathbf{A} - \lambda_{2,3}\mathbf{I}) = 3 - 1 = 2 = m_A(\lambda_{2,3})$ e la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile.
Abbiamo in effetti 3 autovettori linearmente indipendenti:

$$
\mathbf{v}^1 = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^2 = \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^3 = \gamma \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \neq 0.
$$

La soluzione generale del sistema assegnato è ottenuta con riferimento alla (5) e si ha

$$
\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} \; + \; c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} \; + \; c_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t},
$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, costanti arbitrarie.

Esempio 5

Considerata la seguente matrice $\mathbf{A}$, di ordine 2, non diagonalizzabile

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},
$$

l'equazione caratteristica $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = (\lambda - 2)^2 = 0$, per cui $\lambda = 2$, con $m_A(\lambda) = 2$, mentre, essendo

$$\mathbf{A}-2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

risulta $m_G(\lambda) = 2 - \mathsf{ran}\,(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = 2 - 1 = 1$.
L'autovettore $\mathbf{v}^1$, associato a $\lambda = 2$, è

$$\mathbf{v}^1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

Per determinare la matrice di passaggio $\mathbf{P}$, che trasforma la matrice $\mathbf{A}$ nella forma canonica di Jordan, essendo la prima colonna data da $\mathbf{v}^1$, occorre determinarne la seconda colonna $\mathbf{v}^2$. Con riferimento alla (16), $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\ \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1$, dobbiamo risolvere il seguente sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} -v_1^2 + v_2^2 = 1 \\ -v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{cases}.$$

Una soluzione è il vettore

$$\mathbf{v}^2 = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0,$$

per cui la matrice di passaggio $\mathbf{P}$ è la seguente

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esempio 6

In relazione alla seguente matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

troviamo una matrice di passaggio $\mathbf{P}$ che generi la forma canonica di Jordan di $\mathbf{A}$.
Risulta $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = -\left(\lambda - 2\right)^3 = 0$, per cui $\lambda = 2$, con $m_A(\lambda) = 3$, mentre, essendo

$$\mathbf{A}-2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

si ha $m_G(\lambda) = 3 - \mathsf{ran}(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = 3 - 2 = 1$ come nel caso (a).

Un autovettore è

$$\mathbf{v}^1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0,$$

mentre la seconda e terza colonna di **P** si ottengono, rispettivamente, risolvendo i seguenti sistemi lineari:

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\ \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1;$$

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\ \mathbf{v}^3 = \mathbf{v}^2.$$

Ad esempio, si possono assumere come seconda e terza colonna di **P**, rispettivamente, i vettori

$$\mathbf{v}^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una possibile matrice di passaggio **P** che realizza la forma canonica di Jordan (14) per la matrice **A** è, quindi, data da

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esempio 7

In relazione alla seguente matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix},$$

troviamo una matrice di passaggio **P** che generi la forma canonica di Jordan della matrice **A**. Risulta $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = -(3+\lambda)^3 = 0$, per cui $\lambda = -3$, con $m_A(\lambda) = 3$, mentre, essendo

$$\mathbf{A} + 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

si ha $m_G(\lambda) = 3 - \mathsf{ran}(\mathbf{A}+3\mathbf{I}) = 3 - 1 = 2$ come nel caso (b). Abbiamo quindi 2 autovettori linearmente indipendenti.

Risulta $(\mathbf{A}+3\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, con

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \neq 0. \tag{21}$$

Per determinare una matrice **P** che trasformi la matrice **A** nella forma canonica (15) occorre tenere presente che l'autovettore $\mathbf{v}^1$, prima colonna di **P**, deve garantire che il sistema

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\ \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1$$

abbia soluzioni.
Ad esempio, assunto l'autovettore $\mathbf{v}^1 = (1,1,0)^T$, il sistema $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\ \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1$ non ha soluzioni (non vale per esso il Teorema di Rouché-Capelli), mentre, qualora sia assunto $\mathbf{v}^1 = (1,1,1)^T$, si ottiene un sistema che ha soluzioni, tra le quali, ad esempio,

$$\mathbf{v}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Come terza colonna si assumerà un autovettore, di tipo (21), linearmente indipendente da $\mathbf{v}^1$, ad esempio

$$\mathbf{v}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e, quindi, una possibile matrice di passaggio $\mathbf{P}$ per la matrice $\mathbf{A}$ è la seguente

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esempio 8

Consideriamo una matrice $\mathbf{A}$, di ordine 3, la cui forma canonica $\mathbf{J}$ sia del tipo (13), ossia

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix};$$

in tal caso il sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{y}(t)$ avrà la forma

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = \lambda_1 y_2(t) \\ y_3'(t) = \lambda_2 y_3(t)\ . \end{cases}$$

Risolvendo la seconda e la terza equazione del sistema si ha

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + c_2 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\lambda_1 t} \\ y_3(t) = c_3 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

e, ricordando che la soluzione della prima equazione è data da

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t},$$

si ottiene la soluzione generale del sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{y}(t)$:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 t e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esempio 9

Consideriamo una matrice $\mathbf{A}$, di ordine 3, la cui forma canonica $\mathbf{J}$ sia del tipo (15), ossia

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix};$$

in tal caso il sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{y}(t)$ avrà la forma

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = \lambda y_2(t) \\ y_3'(t) = \lambda y_3(t)\ . \end{cases}$$

Risolvendo la seconda e la terza equazione del sistema si ha

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda y_1(t) + c_2 e^{\lambda t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\lambda t} \\ y_3(t) = c_3 e^{\lambda t} \end{cases}$$

e, tenuto conto della soluzione della prima equazione $y_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$, si ottiene la soluzione generale del sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{y}(t)$:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 t e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Esempio 10

Consideriamo una matrice $\mathbf{A}$, di ordine 3, la cui forma canonica $\mathbf{J}$ sia del tipo (14), ossia

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix};$$

in tal caso il sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{y}(t)$ avrà la forma

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = \lambda y_2(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) = \lambda y_3(t)\ . \end{cases}$$

Sostituita la soluzione $y_3(t) = c_3 e^{\lambda t}$ della terza equazione nella seconda equazione, si ha $y_2'(t) = \lambda y_2(t) + c_3 e^{\lambda t}$ la cui soluzione è $y_2(t) = c_2 e^{\lambda t} + c_3 t e^{\lambda t}$.
Sostituita poi $y_2(t)$ nella prima equazione, si ottiene $y_1'(t) = \lambda y_1(t) + c_2 e^{\lambda t} + c_3 t e^{\lambda t}$, ovvero un'equazione differenziale la cui soluzione è

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + \tfrac{1}{2} c_3 t^2 e^{\lambda t}.$$

La soluzione generale del sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{y}(t)$ è la seguente:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) \;&=\; c_1 e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2 t e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}c_3 t^2 e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \\
&\quad + c_2 e^{\lambda t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_3 t e^{\lambda t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_3 e^{\lambda t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

ovvero

$$
\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}c_3 t^2 \\ c_2 + c_3 t \\ c_3 \end{bmatrix}. \tag{23}
$$

Esempio 11

Troviamo la soluzione generale del sistema dinamico omogeneo, di tipo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$:

$$
\begin{cases}
x_1'(t) = -2x_1(t) - x_2(t) \\
x_2'(t) = x_1(t) - 4x_2(t) \\
x_3'(t) = x_1(t) - x_2(t) - 3x_3(t)\ .
\end{cases}
$$

La matrice $\mathbf{A}$ del sistema è la seguente

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}
$$

e risulta $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = -(3+\lambda)^3 = 0$, per cui si ha un unico autovalore $\lambda = -3$, con $m_A(\lambda) = 3$, mentre, come indicato nell'Esempio 7, si ha $m_G(\lambda) = 2$ e, pertanto, la matrice $\mathbf{A}$ non è diagonalizzabile e una matrice di passaggio $\mathbf{P}$ è la seguente

$$
\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

La forma canonica di Jordan associata alla matrice $\mathbf{A}$ è del tipo (15) e, come indicato nell'Esempio 9, la soluzione generale del sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{y}(t)$ è precisata nella (22), mentre la soluzione generale del sistema dato è ottenuta come segue:

$$
\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\,\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}\cdot e^{-3t} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t + c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 t + c_3 \\ c_1 + c_2 t \end{bmatrix}\cdot e^{-3t}.
$$

Esempio 12

Troviamo la soluzione generale del sistema dinamico omogeneo, di tipo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) - 3x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 3x_2(t) - 2x_3(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_2(t)\ . \end{cases}$$

La matrice $\mathbf{A}$ del sistema è la seguente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e risulta $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = -(\lambda - 2)^3 = 0$, per cui si ha un unico autovalore $\lambda = 2$, con $m_A(\lambda) = 3$, mentre, come indicato nell'Esempio 6, si ha $m_G(\lambda) = 1$ e, pertanto, la matrice $\mathbf{A}$ non è diagonalizzabile e una matrice di passaggio $\mathbf{P}$ è la seguente

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La forma canonica di Jordan associata alla matrice $\mathbf{A}$ è del tipo (14), e, come indicato nell'Esempio 10, la soluzione generale del sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{y}(t)$ è precisata nella (23), mentre la soluzione generale del sistema dato è ottenuta come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\,\mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}c_3 t^2 \\ c_2 + c_3 t \\ c_3 \end{bmatrix} \cdot e^{2t} = \\ &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}c_3 t^2 + 2c_2 + 2c_3 t \\ c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}c_3 t^2 + c_2 + c_3 t + c_3 \\ c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}c_3 t^2 + c_2 + c_3 t \end{bmatrix} \cdot e^{2t} = \\ &= \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 + (c_2 + 2c_3)t + \frac{1}{2}c_3 t^2 \\ c_1 + c_2 + c_3 + (c_2 + c_3)t + \frac{1}{2}c_3 t^2 \\ c_1 + c_2 + (c_2 + c_3)t + \frac{1}{2}c_3 t^2 \end{bmatrix} \cdot e^{2t}\ . \end{aligned}$$

Esempio 13

Considerato il seguente sistema dinamico

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -6x_1(t) + 5x_2(t)\ , \end{cases}$$

troviamo l'integrale generale sia tramite il calcolo degli autovalori, sia tramite la formula di Apostol-Putzer.

Osservato che la matrice $\mathbf{A}$ del sistema è la seguente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix},$$

applicando il procedimento del calcolo degli autovalori, risulta quanto segue:

$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = -\lambda(5-\lambda)+6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, per cui si ha $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$;

$\lambda_1 = 2 \Rightarrow v^1 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_1 \in \mathbb{R};$

$\lambda_2 = 3 \Rightarrow v^2 = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c_2 \in \mathbb{R};$

l'integrale generale è quindi

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Applicando la formula di Apostol-Putzer, per il caso in esame ($n = 2$, con 2 autovalori distinti $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$), si ha quanto segue:

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{2t} \frac{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}}{2-3} + e^{3t} \frac{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}}{3-2},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c} \quad &= \quad e^{2t} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + e^{3t} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \\ &= \quad e^{2t} \begin{bmatrix} 3c_1 - c_2 \\ 6c_1 - 2c_2 \end{bmatrix} + e^{3t} \begin{bmatrix} -2c_1 + c_2 \\ -6c_1 + 3c_2 \end{bmatrix} = \\ &= \quad e^{2t}(3c_1 - c_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + e^{3t}(-2c_1 + c_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e poichè c_1 e c_2 possono essere scelti arbitrariamente in infiniti modi, ritroviamo la soluzione precedentemente trovata.